Årg. 42:3 Sept. 1959

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

ANDRA HÄFTET

Magnus Matell, Ytaktiva ämnen 157

Josef Andersson, Några stereometriska formler 167

Jonas O. Linde, Något om modern lågtemperaturteknik 170

Tore Öberg, Heltalstrianglar med rationellt förhållande mellan vinklarna . . 181

O. Lindstad, Planeters bevegelse 184

Bokanmälningar: Maxwell, Fallacies in Mathematics; Asmus, Einführung in die höhere Mathematik; Andersson, Introduction to Multivariate Statistical Analysis; Stephan/McCarthy, Sampling Opinions; Kullback, Information Theory and Statistics; Dixon/Massey, Introduction to Statistical Analysis; Kendall/Stuart, The Advanced Theory of Statistics; Denjoy, Un demi-siècle de notes etc.; Rouse, Advanced Mechanics of Fluids; Stephenson/Kilmister, Special Relativity for Physicists; Leech, Classical Mechanics; Grivet/Balquière, Le bruit de fond; Galbraith, Extensive Air Showers; Dow, Fundamentals of Advanced Missiles; Kinney, Engineering Properties and Applications of Plastics; Bers, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics; Watkins, Topics in Electromagnetic Theory; De Vaucouleurs, L'exploration des galaxies voisines; Leimanis/Minorsky, Dynamics and Nonlinear Mechanics; Grabbe/Ramo/Wooldridge, Handbook of Automation; Bower/Schultheiss, Introduction to the Design of Servomechanisms; Lundqvist, Moderna halvledarkomponenter; Semiconductor Abstracts; Campbell, Process Dynamics; French, Principles of Modern Physics; Schröder, Radiobyggboken II. 186

Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. Bågman) 205
Matematiska och fysikaliska uppgifter i fyllnadsprövning efter studentexamen aug. 1959 208

Författare i detta häfte (omslagets andra sida); Insänd litteratur (215)

Annonsörer i detta häfte: R. Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; AB Philips; Svenska Bokförlaget; Svenska Radiobolaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39—41 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:—+25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40, för 1956—1958 à kr. 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning. Slut.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

De nya skrivningstyperna i matematik

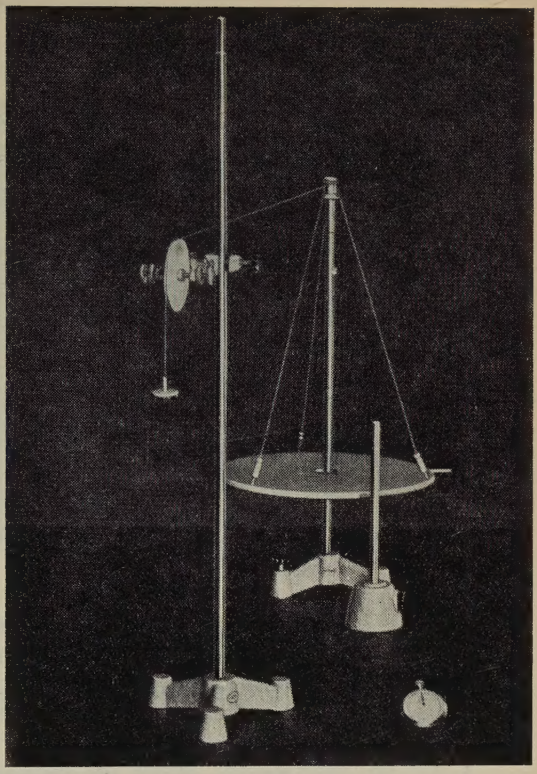
i studentex., som ges fr. o. m. mars 1957, finner Ni i »Problemhäfte 1957» och »Problemhäfte 1958» men även i »Problemhäfte 1956», som innehåller Skolöverstyrelsens »Övningsuppg. i matematik till studentexamen». Pris pr häfte kr. 2:20.

Problemhäften och övriga särtryck skickas per post (porto 15 öre per häfte), om inbetalning sker till Elementas postgiro 527 55 (skriv rekvisition å giro-kupongen).

En komplett Elementa-serie, årg. 1—40, bundna i 20 förlagsband kan erhållas genom Elementas expedition.

Författare i detta häfte: fil. dr J. Andersson, Vaxholm; fil. lic. G. Björck, Stockholm; civiling. P. Blichert-Toft, Göteborg; docent G. Blom, Malmö; tekn. dr E.-Å. Brunberg, Stockholm; observator T. Elvius, Uppsala; fil. lic. W. Forsling, Stockholm; tekn. lic. F. Hjelte, Stockholm; civiling. S. Jahnberg, Stockholm; ingenjör O. Jonsson, Lidingö; tekn. lic. M. Landahl, Stockholm; professor J. O. Linde, Stockholm; lektor O. Lindstad, Oslo; civiling. G. Markesjö, Stockholm; docent M. Matell, Göteborg; adjunkt S. Mathisson, Karlskrona; civiling. B. Mårtensson, Linköping; docent S. B. Nilsson, Lund; byrådirektör Å. Persson, Stockholm; lektor L. Råde, Göteborg; laborator L.-H. Zetterberg, Stockholm; civiling. K.-J. Åström, Stockholm; lektor T. Öberg, Norrköping.

Bilaga: Lindståhls Bokhandel.



PHYWE

ATERIEL

.

ÄTTARE och

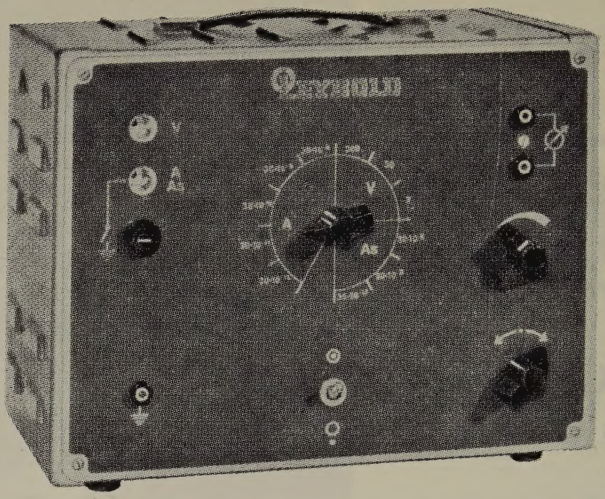
SKÅDLIGARE

NDERVISNING

wes välkända fysikmateriel representeras i Sverige med ensam-
av Norstedts Skolavdelning. Se och pröva materielen på någon
åra utställningar eller rekvirera den rikt illustrerade special-
ogen.

ORSTEDTS SKOLAVDELNING

olm	Göteborg	Malmö	Linköping	Luleå
ygatan 13	Parkgatan 19	Hamngatan 4	Klostergatan 26	Tullgatan 16
29 70	Tel. 13 92 93	Tel. 97 70 90	Tel. 487 20, 487 35	Tel. 134 10



LEYBOLDS MÄTFÖRSTÄRKARE

FÖR SKOLOR

Mätområden: 30×10^{-8}A 30×10^{-9}A
30×10^{-10}A 30×10^{-11}A 30×10^{-12}A

Begär specialprospekt

TAG KVALITET · TAG LEYBOLD

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

Box 3082, Malmskillnadsg. 48 c, Stockholm 3, Tel. 23 37 80
Box 41 58, St. Nygatan 27 b, Malmö 4, Tel. 381 25

Ytaktiva ämnen

Av docent Magnus Matell, Mölndal

De ytaktiva ämnena behandlas ganska styvmoderligt i flertalet kemiska läroböcker, även de mer avancerade. Dock spelar dessa ämnen en betydande roll inom modern teknik. Vi möter dem dagligen i tvätt- och rengöringsmedel, men de används dessutom vid förvånansvärt många tekniska förfaranden inom textilindustri, metallindustri, pappers- och cellulosaindustri, petroleum- plast- och annan kemisk industri, jordbruk, kosmetik, vägbyggnad, gruvhantering etc. De ytaktiva ämnena används i allmänhet i mycket låga koncentrationer och verkar ofta genom ganska komplicerade och ej alltid helt klarlagda processer. Kanske ligger häri en förklaring till deras i jämförelse med t. ex. färgämnen undanskymda plats i kemiundervisningen.

Historik, utvecklingstendenser

Äldst av de ytaktiva ämnena är tvålarna, som, kända sedan tusentals år, dominerat området till ganska sen tid. För drygt 100 år sedan lyckades man på syntetisk väg framställa nya ämnestyper, som kunde ersätta tvålarna, vilka har vissa nackdelar, t. ex. känslighet gentemot hårt vatten och syror. Dessa syntetiska ytaktiva ämnen var av relativt ringa praktisk betydelse fram till första världskriget, då fettbristen tvingade fram ämnen, vars framställning baserades på andra råvaror än fetter. Utvecklingen fortsatte under mellankrigstiden, i synnerhet i Tyskland, där de nya produkterna främst sattes in i textilindustrin. Ett nytt skede kan sägas börja omkring 1945 i och med de syntetiska tvättmedlens genombrott. Som en följd härav har tvåltillverkningen ej blott stagnerat utan även börjat minska på vissa håll, t. ex. i USA, vilket belyses av figur 1. Därmed är ej sagt, att tvålen spelat ut sin roll för världshushållningen. En kolossal industrialiseringsprocess har nu tagit sin början inom några av jordens folkrikaste områden, och där kommer sannolikt tvålarna att till en början dominera för att på ett senare stadium delvis ersättas med syntetiska medel. Sambandet mellan konsumtionen av ytaktiva ämnen och industrialiseringsgraden framgår av fig. 2.

Definition, systematik

Ytaktiva ämnen kan definieras som ämnen, som kraftigt sänker ett lösningsmedels ytspänning även i mycket låga koncentrationer. Som

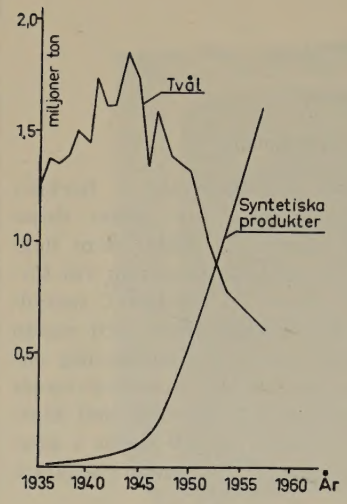


Fig. 1. Försäljning av tvål och syntetiska ytaktiva ämnen i USA sedan 1935.

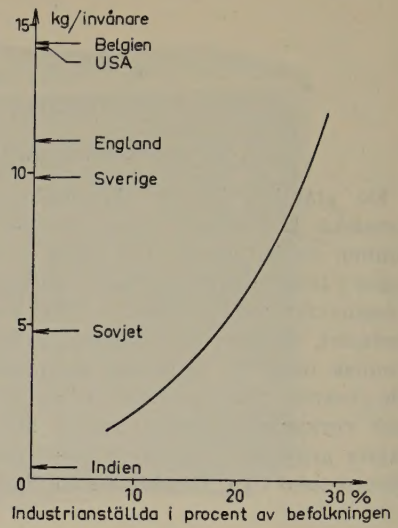


Fig. 2. Konsumtion av ytaktiva ämnen och industrialiseringsgrad.

exempel må nämnas, att ytspänningen för rent vatten sänkes till hälften eller mindre vid tillsats av endast 0,01 % av ett gott vätmedel.

Ett nödvändigt villkor för ytaktivitet är att en och samma molekyl samtidigt innehåller en grupp med affinitet till lösningsmedlet och en grupp utan sådan affinitet. Dessutom krävs en viss balans mellan dessa grupper. Det vanligaste lösningsmedlet är vatten, varför man vanligen talar om *hydrofila* och *hydrofoba* grupper. I stället för hydrofoba säger man ofta *lipofila* (grek. lipos = fett) och därav kommer ett i dessa sammanhang ofta använt begrepp, nämligen HLB, Hydrofil-Lipofil Balans.

Den hydrofoba delen av en ytaktiv molekyl utgöres i allmänhet av en kolväterest med 12—18 kolatomer, som kan vara rak eller grenad, alifatisk, alicyklisk eller aromatisk. Som hydrofil del förekommer sådana grupper som karboxylat, sulfat och sulfonat, alltså anjoner, varför ytaktiva ämnen innehållande dessa grupper klassificeras som anjonaktiva. I katjonaktiva ämnen svarar i allmänhet en aminogrupp för hydrofiliteten. De amfotära ämnena innehåller såväl anjonaktiva som katjonaktiva grupper. En viktig grupp bildar de nonjonaktiva typerna, vars hydrofila grupper vanligen utgöres av hydroxylgrupper eller eterartat bundna syreatomer. I tabell 1 ges en summarisk översikt av dessa huvudtyper jämte exempel.

Tabell 1. Klassificering av ytaktiva ämnen

I. Anjonaktiva
   A. Karbonsyror, t. ex. tvålar
   B. Svavelsyreestrar
      1. Alkylsulfat, t. ex. fettalkoholsulfat, sek. alkylsulfat
      2. Sulfaterade oljor och fetter, t. ex. turkisk rödolja
      3. Sulfaterade amider och estrar
   C. Sulfonsyror
      1. Alkylsulfonat, t. ex. Mersolat
      2. Alkylarylsulfonat, t. ex. dodecylbensensulfonat
      3. Sulfonerade amider och estrar, t. ex. Igeponer

II. Katjonaktiva
   A. Aminsalter
   B. Kvartära ammoniumsalter, t. ex. laurylpyridiniumklorid (LPC)
   C. Aminoamider och imidazoliner

III. Amfotära
   A. Amino- och karboxylgrupp
   B. » » sulfat- eller sulfonatgrupp

IV. Nonjonaktiva
   A. Alkyl- och alkylaryletrar och -thioetrar, t. ex. polyglykoletrar av fettalkoholer och nonylfenol
   B. Estrar och amider, t. ex. fettsyreestrar av polyglykoler och sockeralkoholer, etanolamider

Lösningar av ytaktiva ämnen

Molekylerna i en vätska påverkar varandra genom starka krafter, men i det inre av vätskan kommer de på varje molekyl verkande krafterna att balansera varandra. Annorlunda blir förhållandena i ytskiktet, vars molekyler attraheras kraftigt av närmast underliggande skikt men endast obetydligt av den angränsande gasfasen. Den resulterande kraften yttrar sig som en ytspänning, som lätt kan mätas och vanligen uttryckes i dyn/cm. Vatten har relativt hög ytspänning, 72 dyn/cm vid rumstemperatur, medan organiska ämnens ytspänning vanligen är av storleksordningen 20 à 30 dyn/cm. Som en följd av ytspänningen strävar en vätskeyta att antaga sfärisk form, eftersom specifika ytan och följaktligen även ytenergin då blir minst.

Om ett ytaktivt ämne sättes till vatten, strävar den hydrofoba delen bort från vattnet, medan den hydrofila delen håller molekylerna i lösning. Resultatet av dessa mot varandra verkande effekter blir en kompromiss; de ytaktiva molekylerna samlas i gränsytan mot den omgivande luften, som framgår av figur 3. De intermolekylära krafterna avtar mycket snabbt med avståndet, och då vätskeytan täckts

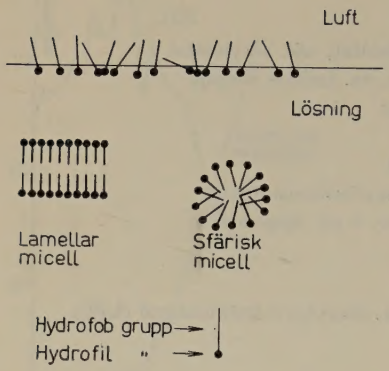


Fig. 3. Schematisk framställning av ytaktiva ämnens orientering i vattenlösning.

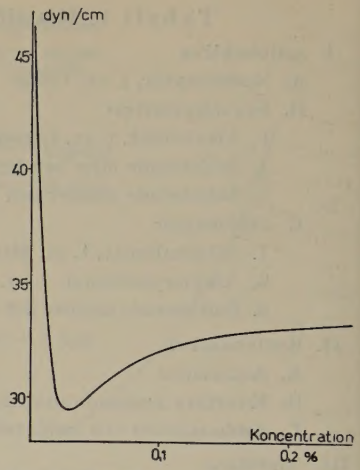


Fig. 4. Ytspänningskurva för lösningar av Berol TVM-452, en sulfaterad laurylpolyglykoleter.

med ett monomolekylärt skikt av det ytaktiva ämnet kommer ytenergin ej längre att bestämmas av vattenmolekylerna utan av den organiska ytfasen, vars ytspänning är väsentligt lägre.

Ur energetisk synpunkt är det naturligt, att det ytaktiva ämnet anrikas i gränsytan, eftersom den fria ytenergin härigenom minskas. Man möter ibland frågan om det ej finns ämnen som höjer ytspänningen. Oorganiska elektrolyter har denna egenskap, men effekten är mycket liten, eftersom ett sådant ämne av energetiska skäl stötes bort från gränsytan och alltså ej kan utöva någon effekt på de i ytan verkande krafterna.

En typisk ytspänningskurva återges i figur 4. Ytspänningen avtar först hastigt, men ganska snabbt nås en koncentration, då fortsatt tillsats ej ger någon ytterligare ytspänningsnedsättning. Denna koncentration kallas kritisk micellkoncentration (cmc) och innebär i princip, att ytan är täckt av ett monomolekylärt skikt av det tillsatta ämnet. Molekyler, som ytterligare tillföres, tvingas in i lösningens inre. Ur energetisk synpunkt är det gynnsammare, om molekylerna då samlas i svärmar, miceller, än om de uppträder en och en. Micellerna kan antaga olika form, sfärisk, lamellar eller stavliknande, som framgår schematiskt av figur 3. På grund av kolvätenaturen hos micellens inre kan den fungera som lösningsmedel för kolväten, oljor och andra feta ämnen. Genom denna s. k. solubilisering kan ett eljest vattenolösligt ämne bringas i lösning.

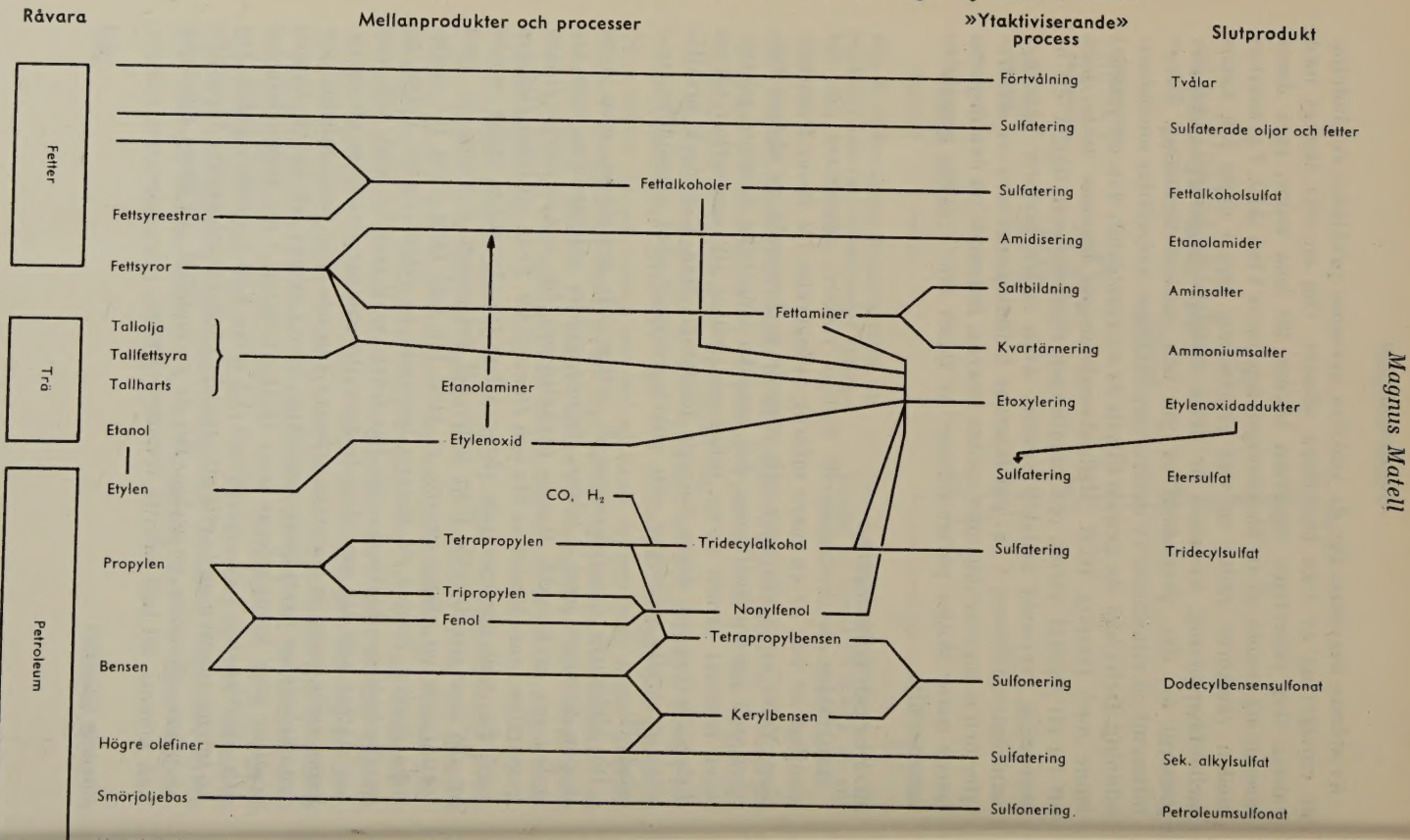
Av största betydelse för de ytaktiva ämnenas praktiska användning är emulgering av icke blandbara vätskor. Om en olja skakas med vatten, slås visserligen oljefasen sönder till små kulor, men dessa förenar sig snabbt, så att blandningen separerar i två skikt. I gränsytan mellan vätskorna råder en viss ytspänning, som i detta fall kallas mellanfasspänning. Systemet är desto stabilare ju mindre dess fria ytenergi är, dvs. produkten av yta och mellanfasspänning. Därav följer, att en minskning av mellanfasspänningen underlättar emulsionsbildning. Detta kan ske genom tillsats av en emulgator, dvs. ett ytaktivt ämne med lämplig HLB. Mellanfasspänningen kommer trots detta att ha ett ändligt värde, och emulsionen representerar därför ett ur energetisk synpunkt instabilt system. Även andra faktorer påverkar emulsionsstabiliteten t. ex. partiklarnas laddning, närvaro av elektrolyter och mängdförhållandet mellan faserna. Beroende på den dispersa fasens natur skiljes på emulsioner av typen olja i vatten respektive vatten i olja.

Råvaror och syntesmetoder

Mångfalden av kommersiellt viktiga ytaktiva produkter gör det omöjligt att här ge en mera utförlig redogörelse för deras framställning. Valet av syntesvägar och råvaror är beroende av sådana faktorer som råvarusituationen, den kemiska industrins struktur, patentläget, tekniskt »know how», tullar osv., vilket allt medverkar till en differentiering av dessa ämnens teknologi. Man kan dock urskilja vissa generella principer och enhetsprocesser som exemplifierats i tabell II.

De viktigaste råvarubaserna är fetter och petroleum, men även skogen kommer med i bilden, främst genom sulfitspriten, som via etylen ger etylenoxid. Denna nyckelråvara för nonjonaktiva ämnen framställes inom landet av Mo och Domsjö AB. Från att fetter tidigare varit den helt dominerande råvaran har tyngdpunkten under senare år allt mer överflyttats från fetter till petroleum. Fetterna är dock fortfarande en viktig råvara, ej blott för tvål utan även för syntetiska ämnen, främst då sådana baserade på fettalkoholer. Priset på fettalkoholerna fluktuerar och har tidvis varit mycket högt, och man har därför sett sig om efter hydroxylföreningar baserade på petroleum, varigenom en stabilare prisnivå kan nås. För vissa ändamål ger fettalkoholerna överlägsna produkter, men i många fall har de kunnat ersättas eller kompletteras med OXO-alkoholer, t. ex. tridecylalkohol och alkylfenoler, t. ex. nonylfenol. På olika håll i världen pågår just nu intensiv forskning i syfte att utnyttja Zieglerkatalysatorer för syntes av högre alkoholer ur etylen. Det är ej omöjligt, att dessa alkoholer kan komma att helt ersätta fettalkoholerna.

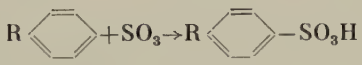
Tabell 2. Viktigare råvaror och syntesvägar vid tillverkning av ytaktiva ämnen



Av de syntetiska ytaktiva ämnena utgör dodecylbensensulfonat den kvantitativt största produkten. Olika typer förekommer beroende på dodecylgruppens struktur. Den f. n. viktigaste typen baseras på tetrapropylbensen (TPB). En mångfald reaktioner användes eller är teoretiskt möjliga för att införa hydrofila grupper i en hydrofob råvara, men av dessa är det ett fåtal som svarar för den övervägande delen av produktionen och som här kommer att flyktigt beröras.

Förtvålning innebär i princip en alkalisk hydrolys av fett under bildning av glycerin och tvål. Reaktionen är i princip enkel, och tvålkokning har praktiserats i ett par tusen år. I själva verket är processen komplicerad och har först under senare tid kunnat helt klarläggas. I fettet finnes alltid små mängder fria fettsyror, som i den alkaliska miljön går i lösning under bildning av tvålmiceller. I micellerna löses homogent såväl fett som alkali, så att hydrolysen huvudsakligen sker i micellernas inre. Numera framställes tvål i växande omfattning enligt kontinuerliga processer.

Sulfonering av alifatiska råvaror är än så länge av ringa betydelse. För alkylarylföreningar, främst då sådana av dodecylbensentyp, är denna process av desto större betydelse. Reaktionen sker enligt formeln



Som sulfoneringsmedel användes tidigare uteslutande oleum, alltså en lösning av svaveltrioxid i svavelsyra. Efter fullbordad reaktion separeras restsvavelsyran från sulfonsyran. Separationen är emellertid ofullständig och den neutraliserade produkten kommer därför att innehålla avsevärda mängder sulfat. Vid framställning av pulvertvättmedel spelar detta ingen roll, då sådana tvättmedel nästan alltid skall innehålla natriumsulfat som »builder». I många fall är en saltfri produkt önskvärd och sulfoneringen utföres då med svaveltrioxid utspädd med inertgas eller luft. Utvecklingen går mot ökad användning av svaveltrioxid och mot kontinuerliga förfaranden, såväl vid oleum- som gassulfonering.

Sulfoklorering enligt Reed användes för att införa sulfonsyragruppen i alifatiska råvaror:

$$RH + SO_2 + Cl_2 \rightarrow RSO_2Cl + HCl$$

$$RSO_2Cl + 2\,NaOH \rightarrow RSO_3Na + NaCl + H_2O$$

Processen är besvärlig, icke minst på grund av de svåra korrosionsproblemen, men fick stor användning i Tyskland under sista kriget,

då Mersolat i stora kvantiteter framställdes enligt detta förfarande ur en syntetisk kolväteblandning, kogasin.

Sulfatering är jämte sulfonering den viktigaste processen för framställning av syntetiska ytaktiva ämnen. Begreppet sulfonering användes ofta felaktigt i stället för sulfatering. Man ser ej sällan uttryck som sulfonerade oljor och fettalkoholsulfonat, trots att dessa produkter är svavelsyraestrar. Vid sulfatering sker reaktionen antingen med en OH-grupp eller med en dubbelbindning, men i båda fallen erhålles en sur svavelsyraester:

$$ROH + H_2SO_4 \rightarrow ROSO_3H + H_2O$$

$$RCH=CHR_1 + H_2SO_4 \rightarrow RCH_2-CH(R_1)OSO_3H$$

Till skillnad från sulfonsyrorna är sulfaten ej stabila gentemot hydrolys, som sker snabbt i sur miljö och i många fall begränsar sulfatens användbarhet.

Det vanligaste sulfateringsreagenset är svavelsyra, men även klorsulfonsyra, oleum, svaveltrioxid och sulfaminsyra används. Med sulfaminsyra sker sulfatering och neutralisation i ett steg:

$$ROH + NH_2SO_3H \rightarrow ROSO_3NH_4$$

Etoxylering, som är den viktigaste processen för framställning av nonjonaktiva ämnen, grundar sig på etylenoxidens rikt varierande reaktionsmöjligheter. Etylenoxid reagerar med föreningar innehållande rörliga väteatomer t. ex. vatten, oorganiska och organiska syror, ammoniak, aminer, alkoholer och fenoler. Vid reaktionen nybildas OH-grupper, som i sin tur kan reagera vidare med etylenoxid under bildning av polyglykoleterkedjor.

Nedan följer några exempel på reaktioner:

$$ROH + n\,CH_2CH_2 \rightarrow RO(CH_2CH_2O)_nH$$

$$R\text{-}C_6H_4\text{-}OH + n\,CH_2CH_2 \rightarrow R\text{-}C_6H_4\text{-}O(CH_2CH_2O)_nH$$

$$RCOOH + n\,CH_2CH_2 \rightarrow RCOO(CH_2CH_2O)_nH$$

$$RNH_2 + n\,CH_2-CH_2 \rightarrow RN\langle (CH_2CH_2O)_aH,\ (CH_2CH_2O)_bH \quad (a+b=n)$$

Produkterna är ej enhetliga utan består av polymerhomologer, fördelade enligt Poisson. Reaktionen utföres i allmänhet under måttligt tryck vid en temperatur av 100—200° C och med natriumhydroxid eller annat alkali som katalysator. Processen är ej alltid så enkel som reaktionsformlerna antyder. Vid etoxylering av karbonsyror sker t. ex. omförestring och produkten innehåller därför avsevärda mängder fri polyglykol och diester. Vid reaktionen med aminer sker bireaktioner bl. a. under bildning av kvartära ammoniumföreningar. Reaktionen störs av vatten, som med etylenoxid bildar polyetylenglykoler, och då dessa genom sina två fria OH-grupper tillväxer dubbelt så fort som huvudprodukten, kan även små mängder vatten verka störande.

Etylenoxidderivatens affinitet till vatten betingas av polyeterkedjans syreatomer genom vilkas fria elektronpar vätebindningar kan bildas med vattenmolekylerna, så att vid tillräckligt antal syreatomer i kedjan en vattenlöslig molekyl erhålles. Vid uppvärmning av en sådan lösning sker dehydratisering och lösningen grumlas. Då detta fenomen inträffar vid en för varje ämne karakteristisk temperatur, används grumlingspunkten ofta för identifiering och bestämning av kedjelängden.

Som redan nämnts, bestäms de ytaktiva egenskaperna av molekylens hydrofila-lipofila balans. Hos etylenoxidprodukterna har man den tämligen unika möjligheten att genom variation av kedjelängden få en efter råvara och avsett användningsområde noga avpassad balans. Produkter med tämligen kort polyeterkedja är oljelösliga och används som emulgatorer. Med växande kedjelängd erhålles vattenlösliga ämnen med varierande användningar, t. ex. som vätmedel, tvätt- och rengöringsmedel.

Möjlighet finns även att bygga upp den hydrofoba delen på likartat sätt ur propylenoxid, som reagerar analogt med etylenoxid under bildning av en hydrofob polyeterkedja, som i sin tur kan omsättas med etylenoxid till blockpolymerer med outtömliga variationsmöjligheter.

Några användningsområden

De effekter som ligger till grund för ytaktiva ämnens användning är främst vätning, dispergering, emulgering, skumning och tvättverkan. I många fall är totaleffekten beroende av en samverkan av flera av dessa grundeffekter, varför blandningar ofta tillgripes för att optimal effekt skall erhållas. Ibland kan två komponenter förstärka varandra genom synergism.

Vätmedel användes inom textilindustrin för att underlätta vätskeinträngning i godset vid tvättning, blekning och färgning. Även vid karbonisering, varvid ull behandlas med utspädd svavelsyra, och vid

mercerisering, då bomull behandlas med stark natronlut (24 %), är vätmedel oumbärliga. Inom läderindustrin användes vätmedel för att påskynda de torra hudarnas vattenupptagning och för att underlätta garvämnets inträngning.

Inom metallindustrin kan vätmedel komma till användning vid ytbehandlingar för att åstadkomma jämn fuktning eller snabb vattenavrinning, vid galvanotekniska förfaranden och för påläggning av korrosionsskyddande fettfilm direkt på våta föremål. Vid sistnämnda process åstadkommer det ytaktiva ämnet en sådan ändring av mellanfasspänningarna i systemet metall-vatten-fett att vattnet förtränges av fettet.

Vid maskindisk i storkök får diskgodset en sista sköljning i ett bad innehållande lågskummande vätmedel, varigenom avrinningen sker så snabbt, att godset självtorkar på någon minut. — »Vått vatten», dvs. vatten försatt med ett vätmedel, användes vid släckning av bränder i bomullsbalar, tygpackar och liknande gods, som eljest är svårt att släcka därför att vattnet ej tränger in snabbt nog.

Emulgatorer har funnit mångsidig användning inom olika industrier, och nya användningsområden dyker ständigt upp.

Vid metallbearbetning användes skär- och borroljor. Genom att emulgera smörjmedlet i vatten, som är ett effektivare kylmedel, kan man använda högre verktygshastigheter. Avfettning av metallföremål underlättas om lösningsmedlet försättes med en emulgator, så att rester av smuts och lösningsmedel vid spolning med vatten emulgeras och rinner bort. — I textilindustrin används spinnoljor för att hålla samman fibrerna vid spinning av ull. Genom att tillsätta en emulgator till spinnoljan kan den lätt sköljas ur med vatten.

Insekticider och herbicider, som används i växande omfattning inom jordbruket, är i allmänhet svårlösliga i vatten. De kan spridas i pulverform, men besprutning är vanligare. De levereras i relativt koncentrerad lösning i ett organiskt lösningsmedel tillsammans med en emulgator och emulgeras lätt vid blandning med vatten till önskad koncentration. — Emulgatorer används även vid beredning av kosmetiska salvor och krämer, emulsionsfärger, asfaltemulsioner för vägbeläggningar samt paraffin- och polytenemulsioner för pappers- och textiländamål.

Tvätt- och rengöringsmedel. Inom detta område har tvålarna mer och mer undanträngts av syntetiska tvättmedel och används numera huvudsakligen för kroppsvård. De vanliga pulvertvättmedlen för hushållsbruk innehåller i allmänhet dodecylbensensulfonat som tvättaktiv komponent. För att ge ett stabilare lödder tillsättes ofta

ettsyreetanolamid. Vid maskintvätt är ett lågskummande tvättmedel tt föredraga, vilket åstadkommes genom att helt eller delvis ersätta ulfonatet med ett nonjonaktivt etylenoxidderivat. Det är även fördelktigt att kombinera ett anjonaktivt med ett nonjonaktivt ämne ur len synpunkten, att tvätteffekten genom synergism förbättras. Utomands, speciellt i USA, har nyligen lancerats flytande tvättmedel avedda att ersätta pulvertvättmedel. De torde bli dyrare än dessa utan tt dock ge några påtagliga fördelar.

Även i fråga om diskmedel sker en differentiering i medel för anddisk respektive maskindisk, varvid de senare är lågskummande. Nonjonaktiva etylenoxidderivat är effektiva rengöringsmedel, men anligen används blandningar av t. ex. dodecylbensensulfonat och ett onjonaktivt ämne.

Tvätt- och rengöringsmedel baserade på syntetiska ytaktiva ämnen nvänds ej blott inom hem och hushåll utan även i tekniska sammanang, t. ex. för tvätt av råull, garn och vävnader inom textilindustrin, engöring av maskiner, bilshampoo, avhartsning av cellulosa, rengöring av pappersmaskinfilt etc.

Några stereometriska formler

Av fil. dr Josef Andersson, Vaxholm

I det följande behandlas med isoperimetrisk metod åtskilliga stereometriska maximi- och minimiuppgifter rörande vissa pyramider (I) och prismor (II).

I. Pyramider

Vi betrakta pyramider P i vilka ett klot kan inskrivas. Det förutsättes vidare att höjden går genom detta klots centrum och slutligen att basytan är given till sin form. — Man kunde även säga att P är omskriven kring en rotationskon K så, att basplanen sammanfalla.

Med M betecknas P:s »mantelyta», dvs. sidoytornas summa, med B basytan och med $T=M+B$ dess totala begränsningsyta. Konens basradie $r=k\sqrt{B}$, där k är en konstant. Är dess toppvinkel $2v$, fås $B=M\sin v$. Pyramidens volym V bestämmes av

$$V^2=[\tfrac{1}{3}\,Br\cot v]^2=k_1B^3(1-B^2:M^2)\cdot(M^2:B^2)$$

där k_1 är en ny konstant. Efter hyfsning framgår

$$V^2=k_1(M^2-B^2)B=k_1T(M-B)B=k_1T(T-2B)B=k_1T(T-M)(2M-T)$$

Man har också

$$\frac{V^2}{M^3}=k_1\left(1-\frac{B^2}{M^2}\right)\cdot\frac{B}{M};\ \frac{V^2}{T^3}=k_1\left(1-\frac{2B}{T}\right)\cdot\frac{B}{T}=k_1\left(1-\frac{M}{T}\right)\left(\frac{2M}{T}-1\right) \qquad (1)$$

Införes inskrivna klotets radie R, får man, emedan $V=\frac{1}{3}RT$, bl. a.

$$\frac{R^2}{T}=k_2\left(1-\frac{2B}{T}\right)\cdot\frac{B}{T} \text{ och } \frac{R^3}{V}=k_3\left(1-\frac{2B}{T}\right)\cdot\frac{B}{T} \qquad (2)$$

där k_2 och k_3 äro konstanter.

En viktig grupp dylika pyramider P utgöres av regelbundna sådana med givet sidoantal.

Exempel 1. För given mantelyta är enligt (1) volymen störst, då den isoperimetriska produkten [1]

$$\left(1-\frac{B^2}{M^2}\right)\cdot\left(1-\frac{B^2}{M^2}\right)\cdot\frac{2B^2}{M^2}$$

är max., dvs. för $B:M=(\sin v=)\,1:\sqrt{3}$; dessutom är på samma gång M min. för givet V. Så är bland regelbundna tresidiga pyramider med given mantelyta den, som i spetsen har ett trirektangulärt hörn, till volymen störst. Bland fyrsidiga regelbundna pyramider befinnes hälften av en reguljär oktaeder äga samma egenskaper.

För kroppar bestående av två med avseende på den gemensamma basytan symmetriska pyramider P gäller även $\sin v=1:\sqrt{3}$, när volymen är max. vid given totalyta eller totalytan min. vid given volym. Observera den reguljära oktaederns roll härvidlag.

Exempel 2. $V^2:T^3$ är max. på samma gång som $(1-2B:T)\cdot(2B:T)$, dvs. för

$$\frac{B}{1}=\frac{T}{4}=\frac{M}{3},\ \sin v=\frac{1}{3}$$

Speciellt har reguljära tetraedern bland regelbundna tresidiga pyramider V_{max} för givet T och T_{min} för givet V.

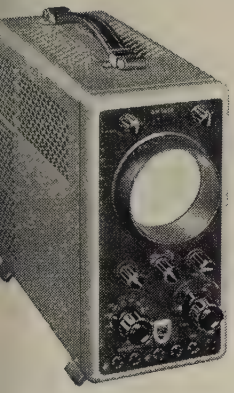
Exempel 3. För de kring ett givet klot omskrivna pyramiderna gäller enligt (2), att $\sin v=1:3$ för en pyramid, som har på en gång V_{min} och T_{min}.

Samtliga sidoytor i en pyramid P tangera den buktiga ytan hos ett halvklot, vars plana yta ligger i pyramidens basplan. Är tillhörande klotradie R_1, så är $V=\frac{1}{3}MR_1$, ty volymen är = summan av de pyra-

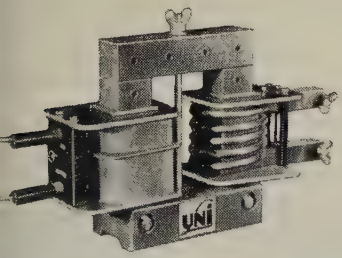
[1] »Om isoperimetriska produkters maxima» se Elementa *10*, 1, 1926 och *18*, 233, 1935.

PHILIPS-
NSTRUMENTEN

ör undervisningen
ttare för lärarna och
tressantare för eleverna.

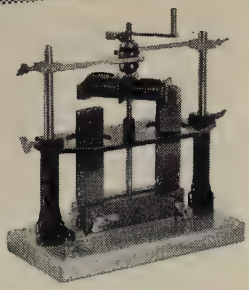


atodstråleoscilloskopet GM 5650

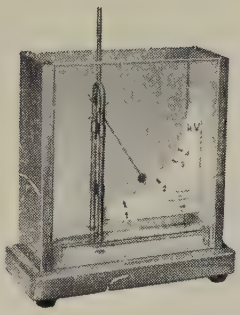


xperimenttransformatorn P5/3

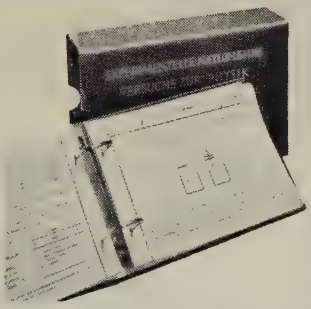
anstående är bara några exempel på
n sortering av instrument och litteratur som
lips tillhandahåller speciellt för fysikun-
rvisning. Vi sänder Er gärna specialpro-
kt på dessa samt vår stora huvudkatalog
er mättekniska utrustningar.



Motorgeneratormodellen P5/4



Statisk Voltmeter P5/6



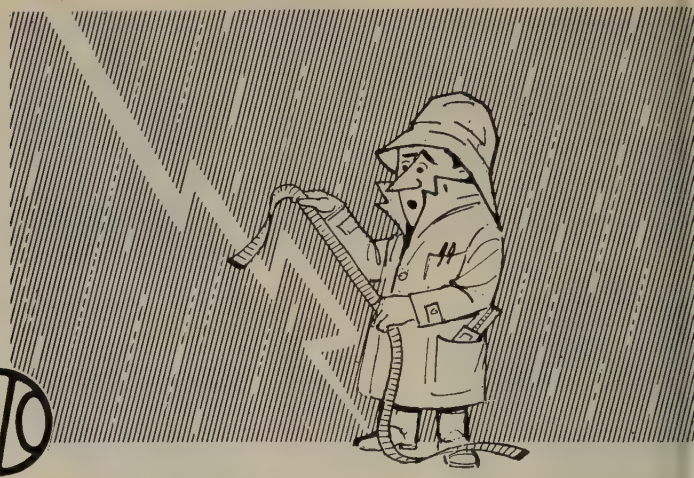
Experimentelle Naturlehre
— Versuche zur Physik

PHILIPS

PHILIPS

Svenska Aktiebolaget Philips
Mätinstrumentavdelningen
Postbox 6077 • Stockholm 6.
Tel. 34 05 80. Rikssamtal 34 06 80

Har Ni rätta utrustningen för elektriska mätningar ?



AVO

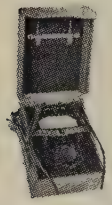
AVO-instrument

för att vara exakt

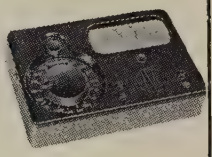
AVOMETER MOD. 8 är det rätta universalinstrumentet för den anspråksfulle teleteknikern. Det är lätt att handha, lätt att avläsa, har god noggrannhet och tål tack vare en robust konstruktion och ett speciellt överbelastningsskydd alla rimliga elektriska och mekaniska påfrestningar. AVO 8 är högohmig, 20000 Ω/V, har polvändare, spegelskala och 28 mätområden. Mäter även växelström upp till 10 A. För 25 kV likspänning finns separat tillsats.

Obs. sänkt pris
Nu kr. 425:—
Beredsk.väska Kr. 45:—

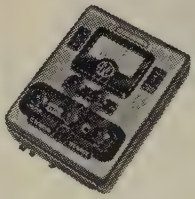
Begär prospekt med närmare uppgifter om AVO 8 och övriga AVO-instrument.



AVOMETER MOD. HD är det rätta instrumentet för den fordrande starkströmsteknikern. 1000 Ω/V, lik- o. växelström 10 A. Kr 285.—



AVO MULTIMINOR MOD. 1, 10000 Ω/V, 19 mätområden. Det rätta universalinstrumentet i fickformat för varje serviceman. Kr 95:—



AVO RÖRVOLTMETER MOD. E med LF uteff.-meter, 56 mätområden, l-ksp. 250 mV — 10000 V, väskmodell. Kr 860:—

AVO RÖRMÄTBRYGGA MOD. V/3 mäter "konditionen" hos alla standardrör och upptar deras karakteristikor. Kr 1250:—

SRA

SVENSKA RADIOAKTIEBOLAGET

Alströmergatan 14 — Stockholm 12 — Tel. 22 31 40
Filialer i Göteborg, Malmö, Norrköping, Sundsvall, Örebro

mider, som har sidoytorna till basytor och toppen i halvklotets medelpunkt. Härav och av (1) erhålles

$$\frac{R_1^2}{M}=k_4\left(1-\frac{B^2}{M^2}\right)\cdot\frac{B}{M}$$

där k_4 är konstant, varför M och V har minimum, då $\sin v=1:\sqrt{3}$, om R_1 är givet.

Man kan efter gränsövergång ersätta P med en rät cirkulär kon och de i exemplen härledda resultaten gälla oförändrade i tillämpliga delar.

II. Prismor

Vi betrakta nu raka prismor Q, vilkas basytor ha given form. Basytorna äro vardera B, sidoytornas summa (»mantelytan») M och totalytan $T=M+2B$; höjden h och volymen V. Först är då $M=kh\sqrt{B}$, sedan

$$V^2=B^2h^2=k_1BM^2=k_1B(T-2B)^2=k_2M^2(T-M);\ k_1,\ k_2 \text{ konstanter} \quad (3)$$

Exempel. För givet T är V maximum på samma gång som den isoperimetriska produkten $4B(T-2B)^2$, dvs. för

$$\frac{B}{1}=\frac{T}{6}=\frac{M}{4}$$

Efter division med T^3 i (3) följer att samma fördelning av begränsningsytorna gäller för ett prisma Q, när T är min. för givet V. Äro t. ex. basytorna egyptiska trianglar, blir förhållandet mellan sidokant och minsta baskant = 2:3. Prototypen för regelbundna 4-sidiga Q med $B:1=T:6=M:4$ är naturligtvis kuben. Även i detta fall kan Q ersättas med gränsfallet rät cirkulär cylinder. Hos den liksidiga är $B:1=T:6=M:4$.

Till sist må anföras ett fall, där samma metod kräver en liten transformation:

För vilken pyramid P omskriven kring ett klot med den givna radien R har M sitt minimum?

Emedan $V=\frac{1}{3}(M+B)R$, övergår $V^2=k_1(M^2-B^2)B$ i

$$\frac{R^2}{M}=k_2\cdot\frac{\left(1-\frac{B}{M}\right)\frac{B}{M}}{1+\frac{B}{M}}$$

Sättes här $1+B:M=x$, kan högra ledet, frånsett konstanta faktorn, skrivas $3-(x+2:x)$. Då parentesens termer ha produkten 2, når deras summa sitt minimum, när bägge äro lika dvs. $x=\sqrt{2}$. Resultatet är alltså att $\sin v=\sqrt{2}-1$, när M är minimum.

Något om modern lågtemperaturteknik

Av professor Jonas O. Linde, K. Tekniska Högskolan, Stockholm

De första lyckade försöken att kyla ned luft till vätska (—193° C) gjordes för cirka åttio år sedan. Pionjärarbetena utfördes främst av schweizaren Pictet, fransmannen Cailletet och två polska forskare, Wroblemski och Olszewski. För den närmast därefter följande utvecklingen svarar främst Hampson, England, och C. v. Linde, Tyskland. Den sistnämnde bragte metoden för flytande-luftframställning till stor fulländning. Sålunda kunde redan vid slutet av förra århundradet produktionen av flytande luft ske i stor skala med den av v. Linde utvecklade metoden.

Väte (normal kokpunkt —253° C) kondenserades för första gången år 1898 av engelsmannen Dewar. Tio år senare (1908) lyckades holländaren Kamerlingh Onnes kondensera den sista av de »permanenta» gaserna, helium (normal kokpunkt —268,9° C).

Överföringen från vätska till fast fas kan i fallen luft (syre, kväve) och väte ske enkelt genom att man låter vätskorna koka under förminskat tryck. Kokpunkten sjunker härvid, och man uppnår vid tillräckligt lågt tryck stelningspunkten. Stelning kan i dessa fall åstadkommas även genom höjning av trycket över vätskan vid konstant temperatur. För helium leder ej det förstnämnda förfarandet till målet. Även vid den lägsta genom tryckminskning uppnådda temperaturen, ca 0,7° K, förblir nämligen helium flytande. Detta gäller även vid med andra metoder uppnådda ännu lägre temperaturer, ca 0,001° K. Först vid ett övertryck av ca 25 atm kan helium bringas i fast form. Det mycket svåra problemet att framställa och påvisa fast helium löstes av W. H. Keesom, Holland (1926). Med tillräckligt höga tryck kan fast helium erhållas även i temperaturområdet över vätskefasens existensområde, $T > 5{,}2°$ K, som är kritiska temperaturen för helium som vätska.

Lågtemperaturforskningen avser i första hand temperaturområdet för flytande väte och helium. Under en lång följd av år var denna forskning begränsad till ett fåtal laboratorier i världen med Kamerlingh Onnes' Laboratorium, Leiden, som det dominerande. Efter 1946 har situationen radikalt ändrats i detta avseende. Vid denna tidpunkt blev nämligen den av den amerikanske fysikern Samuel Collins konstruerade flytande-helium-maskinen kommersiellt tillgänglig. Denna

maskin har på grund av sin enkelhet i drift betytt en revolution på området. För närvarande finnes ca 150 sådana apparater installerade vid olika laboratorier inom och utom USA. År 1955 anskaffades genom Statens Tekniska Forskningsråd ett exemplar till Fysiska Institutionen vid K. Tekniska Högskolan. I föreliggande uppsats skall redogöras för apparatens konstruktion och arbetssätt. I samband därmed skall även ges en kort beskrivning av lågtemperaturteknikens allmänna teori.

Metoder för köldalstring och gaskondensering

Yttre arbetsmetoden. När en gas får utvidga sig under uträttande av ett yttre arbete sker en avkylning av gasen. Den mot volymändringen dV svarande temperaturändringen dT vid reversibel adiabatisk process erhålles av uttrycket

$$mc_v dT = -p\,dV \qquad (1)$$

där m är gasens massa och c_v dess specifika värme vid konstant volym. För en ideal gas (ingen växelverkan mellan molekylerna) utsäger ekvationen, att arbetet ($p\,dV$) sker helt på bekostnad av gasens värmeinnehåll. Ekv. 1 gäller med god tillnärmelse även för vanliga (icke-ideala) gaser. Yttre arbetsmetoden utnyttjas i regel endast för förkylning av den gas som skall kondenseras. — Det låga mättningstrycket, man har att räkna med vid låga temperaturer, gör metoden ej användbar för kondensering av gasen.

Metoden med Joule-Thomson-effekten. (JT-effekten) Om såsom är skisserat i fig. 1 en gas får strömma friktionsfritt i ett rör förbi ett strypställe med tryckfall, blir nettoarbetet för en given gasmassa $p'V' - pV$. (Gasmassan tillföres arbetet pV av den bakomliggande gasströmmen och uträttar själv arbetet $p'V'$ på den framförliggande). Med användning av de i figuren givna beteckningarna ger energiprincipen för denna strömning

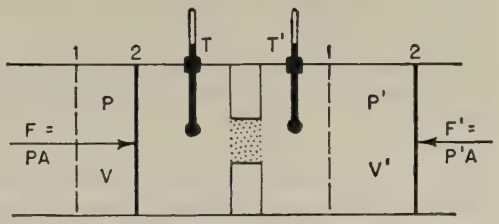


Fig. 1. Strypflänsförsöket (porösproppexperimentet) JT-effekten.

$$U + pV = U' + p'V' \qquad (2)$$

Uttrycket $U+pV$ benämnes *entalpi.*

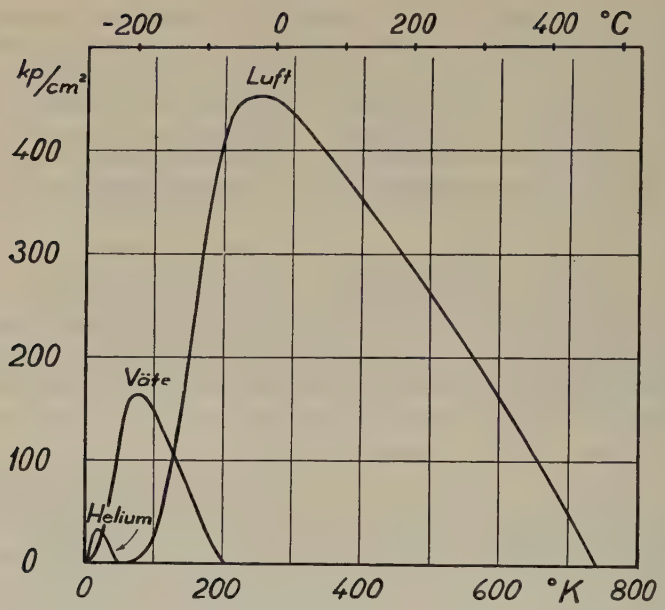


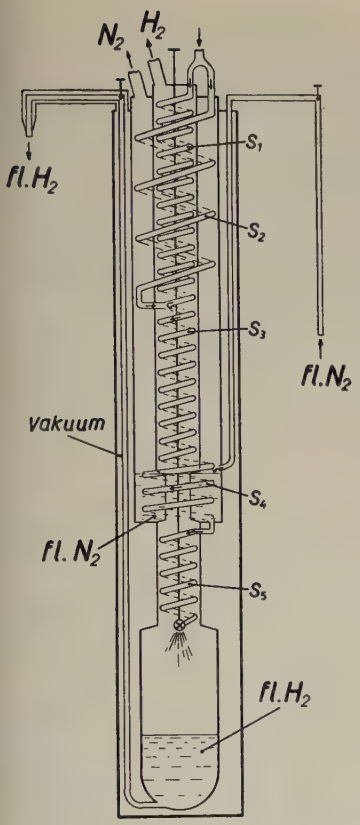
Fig. 2. Inversionskurvorna för luft, väte och helium.

JT-experimentet är alltså karakteriserat av konstant entalpi vid processen ifråga. För ideala gaser är dessutom energin oberoende av gasens volym och tryck, varför man har

$$U=U' \quad \text{varav} \quad pV=p'V' \tag{3}$$

som är Boyles lag för isoterma tillstånd hos en ideal gas.

Vid utförande av strypflänsexperimentet med vanliga (icke-ideala) gaser erhålles som regel en temperaturändring hos gasen, *Joule-Thomson-effekten*. Effekten kan vara positiv eller negativ (temperatursänkning eller temperaturförhöjning). Den kan i fallet temperatursänkning utnyttjas för kondensering av gasen. Teoretiskt förklaras effekten av att krafter existerar mellan gasens molekyler. När resulterande kraften är en attraktionskraft sker expansionen under uträttande av ett (inre) arbete med åtföljande avkylning av gasen. (Den fullständiga teorin för effekten är relativt komplicerad och måste förbigås i denna framställning.) JT-effekten växlar som regel tecken vid viss temperatur, *inversionstemperaturen*. Effekten beror dessutom av gasens tryck, så att inversionstemperaturen varierar med gastrycket. Sambandet mellan inversionstemperatur och tryck återges med den s. k. *inversionskurvan*. Fig. 2 återger i ett pT-diagram denna



kurva för luft, väte och helium. Endast inom det arbetsområde som begränsas av kurvan och T-axeln har JT-effekten det tecken som motsvarar temperatursänkning av gasen. Av data givna i figuren framgår, att väte måste förkylas till minst 200° K och helium till 30° K, om JT-effekten skall kunna utnyttjas för gasernas kondensering. —Teoretiskt gäller för alla gaser, att inversionstemperaturen vid $p \approx 0$ är 6,75 T_k där T_k är vätskans kritiska temperatur.

I apparater för kondensering av väte/helium kan förkylningen av gaserna ske antingen enligt yttre arbetsmetoden eller med hjälp av flytande luft resp. flytande väte (för helium).

Fig. 3. Apparat för framställning av flytande väte enl. klassiska metoden. Gasens förkylning sker med flytande kväve; kondenseringen sker med hjälp av JT-effekten. S_1—S_4 är rörspiraler av koppar för vätgasen; ingångstryck ca 160 atm. S_5 är en schematisk bild av JT-värmeväxlaren.

Fig. 3 återger schematiskt den vid Kamerlingh Onnes' laboratorium, Leiden, sedan länge använda apparaturen för produktion av flytande väte enligt sistnämnda metod.

Moderna lågtemperaturapparater

1. Allmänna apparatelement. Huvuddelarna av apparaturen i en modern lågtemperaturanläggning, där förkylningen av gasen sker enligt yttre arbetsmetoden, är kompressorn, expansionsmaskinen, värmeväxlaren och JT-ventilen. Därtill kommer bl. a. gasbehållare och absorptionsfällor för rening av gaserna.

För effektiviteten hos en lågtemperaturmaskin spelar värmeväxlaren en viktig roll. Den har till uppgift att överföra »köldinnehållet» från en gasström till en annan. Huvudprincipen för dess konstruktion

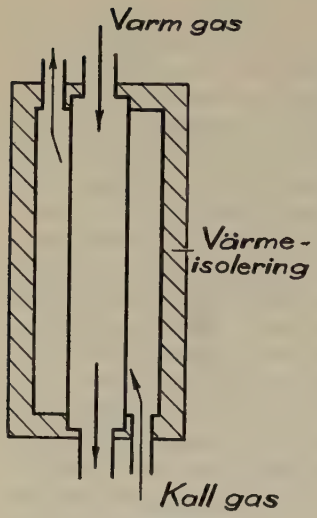


Fig. 4. Värmeväxlarens princip.

framgår av fig. 4. — Det kan omnämnas, att värmeväxlaren infördes i lågtemperaturtekniken redan av C. v. Linde, som till stor del tack vare denna anordning snabbt vann stora framgångar med sina konstruktioner. Samtidigt utförde Hampson i England experiment efter samma linje. Hampsonväxlaren har ofta tjänat som förebild vid senare konstruktioner på området.

2. Collins' helium-köldmaskin. I fig. 5 är det av firman A. D. Little, Cambridge, USA, tillhandahållna lågtemperaturaggregatet schematiskt återgivet. Huvuddelen, Collins-maskinen (längst till höger i figuren) är ritad i starkt förstorad skala i förhållande till den övriga apparaturen. — Handelsbenämningen på aggregatet är A. D. L. Collins' helium-kryostat. (Det må påpekas, att inom mättekniken med »kryostat» avses endast det värmeisolerade kärl vari mätningar med hjälp av de kalla vätskorna utföres.) En lista över de olika apparatdelarna återfinnes i fig. 5.

Maskinens verkningssätt är följande. Heliumgasen föres från gascylindrarna (längst till vänster i figuren) via en med flytande kväve (eller luft) kyld träkolsfälla till en gasklocka, tätad med gummiduk (neoprene) och därifrån till den i fyra steg arbetande Kellog-kompressorn (pumpkapacitet ca 50 normal m^3 heliumgas per timme, maximalt tryck 16 atm). Gasen kyles efter kompressionen till rumstemperatur och kommer sedan in i gaskondenseringssystemet, som innehåller värmeväxlare, *två* expansionsmaskiner, JT-ventil och reningsfällor med aktivt kol. Efter passagen genom den ena av reningsfällorna fördelar sig gasen på två strömmar. Den ena går genom övre expansionsmaskinen, medan den andra fortsätter genom återstående delen av värmeväxlaren fram till den andra expansionsmaskinen. Via en separat värmeväxlare kan en del av gasströmmen sedan fortsätta fram till JT-ventilen. Under nedkylningen av apparaten hålles JT-ventilen, som kan regleras utifrån, stängd. I expansionsmaskinerna får den komprimerade gasen under expansion pressa kolvarna nedåt, vilken rörelse genom kolvstängerna fortplantas till en oljepump monterad ovanpå maskinens chassi. Det härvid av gasen uträttade arbetet resulterar enl. ekv. (1) i en temperatursänkning hos

1. Heliumcylinder
2. Träkolsfälla (kyld med flytande kväve)
3. Gasklocka
4. Kompressor
5. Kylvattenledning
6. Oljefilter
7. Gaskondenseringssystemet i dess helhet
8. Värmeväxlare
9. Expansionsmaskiner
10. Ventil (stängd vid prod. av fl. väte)
11. JT-ventil
12. Träkolsfällor
13. Oljepump (broms för expansionsmaskiner)
14. Flytande helium resp. flytande väte
15. Kondenseringsslinga för väte
16. Avtappningsrör för flytande helium resp. väte
17. Ledning till högvakuumpump

A Rörslinga för kylning med flytande luft

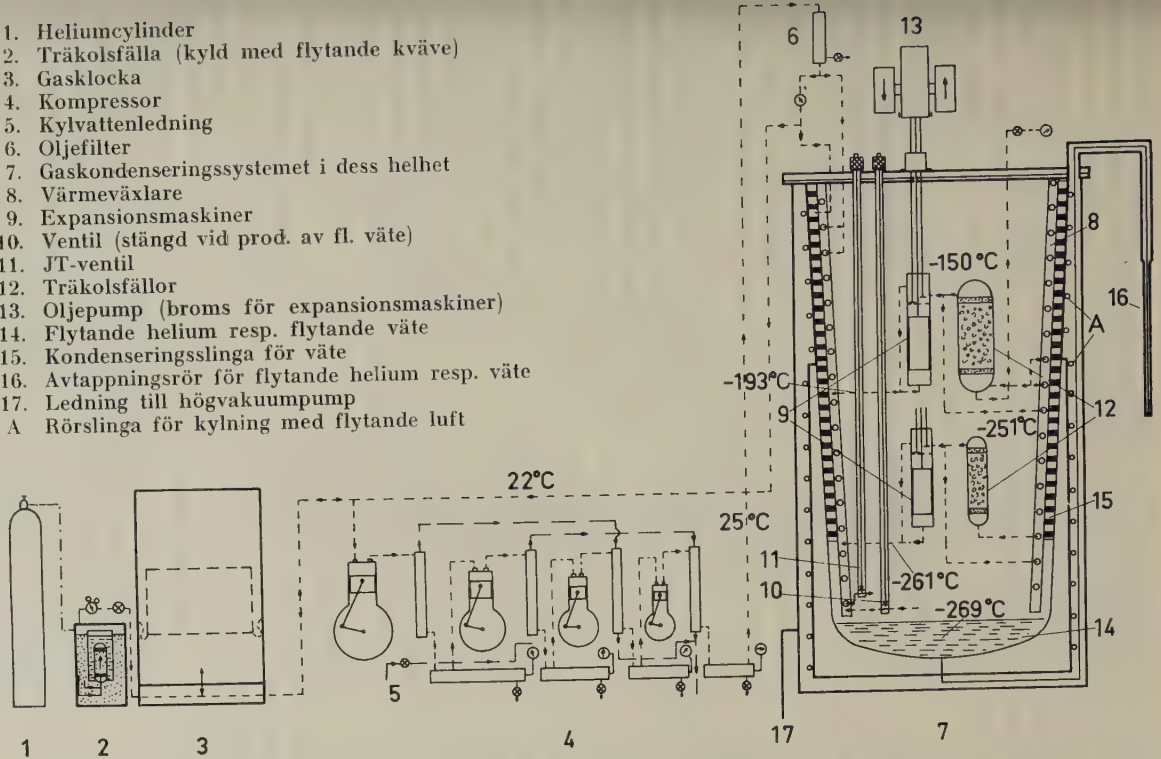


Fig. 5. Schematisk bild av A. D. L. Collins' lågtemperaturanläggning.

gasen. Den avkylda gasen återvänder genom värmeväxlarens yttersystem och avlämnar härvid sitt »köldinnehåll» till den genom motsvarande högtryckssystem av värmeväxlaren kontinuerligt inströmmande gasen, vars temperatur därigenom kommer att sjunka kontinuerligt. Efter ca 3 timmar har den ur expansionsmaskinerna utträdande gasen nått de i fig. 5 angivna temperaturerna (—261°C vid maskin II). Av fig. 2 framgår att denna temperatur är tillräckligt låg för att JT-effekten skall kunna utnyttjas för gasens fortsatta nedkylning och kondensering. JT-ventilen öppnas därför vid detta stadium av processen, varefter maskinen producerar ca 2 liter flytande helium per timme. Den gas som ej kondenseras återvänder via en separat värmeväxlare och huvudvärmeväxlaren till kompressorns ingångssida och genomgår således kretsloppet på nytt. — De till maskinen hörande värmeväxlarnas stora effektivitet framgår av att gasen vid utträdet ur övre värmeväxlaren har en temperatur som endast med ca 1 grad skiljer sig från den inkommande gasens.

Svårigheten med tätning och eliminering av friktion i samband med kolvrörelsen vid ifrågavarande låga temperaturer har i Collins-maskinen fått en elegant lösning. Man har gjort sig oberoende av smörjmedel genom att kolvarna (av nitrerat stål och finpolerade) dimensionerats så, att ett glapp på några tusendels millimeter förefinnes mellan kolv och cylindervägg. Inga kolvringar erfordras. Den läckning som blir oundviklig vid denna konstruktion har bringats till ett minimum genom att kolvarna ges en betydande längd samt dessutom förses med ett antal runtgående spår. Fig. 6 återger ena expansionsmaskinen med rörförbindningar, kolv- och ventilstänger. Ventilstängernas rörelse i nedåtgående riktning ombesörjes av stålfjädrar, vid uppåtgående riktning däremot av kolvrörelsen. Härigenom utsättes stängerna under driften endast för dragspänningar och kan göras relativt smala. Samma gäller kolvstången, vilken föres uppåt av svänghjul i oljepumpverket. Såsom framgår av figuren är tätningen av stängernas genomföring förlagd till den del av apparaturen som har rumstemperatur.

Expansionsmaskinerna och övrig till lågtemperaturdelen hörande apparatur är placerad i ett dewar-kärl (termos) av metall som pumpas kontinuerligt med oljediffusionspump. På dewar-kärlets utsida är fastlödd en rörslinga, genom vilken flytande luft kan ledas. Vid utnyttjande av denna extra kylmöjlighet ökas maskinens produktionskapacitet från 2 till 4,5 liter flytande helium per timme. Nerkylningstiden minskar samtidigt från 3 till 2 timmar. Expansionsmaskinernas varvtal kan regleras med nålventiler i oljepumpverket. I nedre delen av dewar-kärlet och i kontakt med dess inre yta finnes en heliumgastermometer monterad, som ger möjlighet till kontroll av tempera-

turen under drift. Termometergasens tryck avläses på en visarmanometer direkt graderad i temperaturgrader (0—200° K). Utrymmet i maskinens dewar är avsett att kunna utnyttjas som mätkryostat vid de fysikaliska mätningarna. I regel använder man dock hellre yttre kryostater.

Överföringen av heliumvätskan från maskinens dewar till yttre kryostat eller transportkärl sker genom sifonering. Sifonen utgöres av ett dubbelväggigt rör med högvakuum som isolering i mellanrummet mellan de bägge rören. Vätskan får flyta fram i det inre röret och åstadkommer ett »absolut vakuum» i det isolerande mellanrummet mellan rören, (som i utgångsläget ej behöver vara högevakuerande, förutsatt att där ej finnes någon heliumgas). Heliumvätskan måste alltid vara helt avstängd från yttre luften, då eljest luftkondensering snabbt skulle inträda med åtföljande förångning av helium.

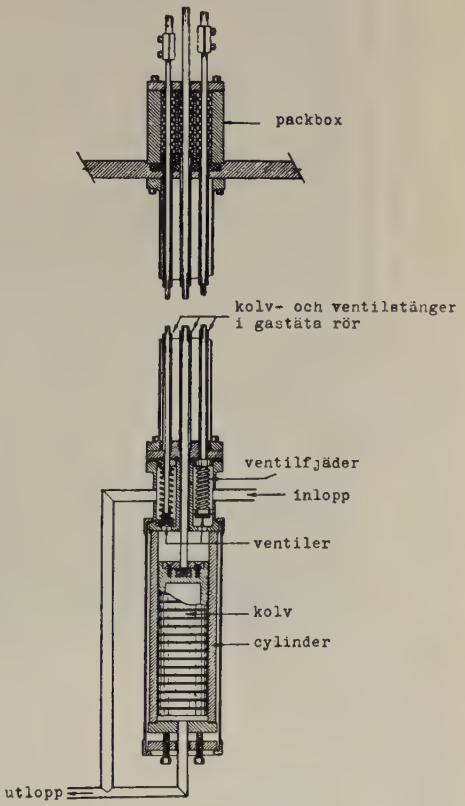


Fig. 6. Collins-apparatens ena expansionsmaskin.

Fig. 7 visar en vid KTH använd yttre mätkryostat. Termoskärlet med flytande helium är placerat i en från yttre luften sluten metallbehållare, som står ned i ett termoskärl med flytande luft, vilket i sin tur är inneslutet i ett öppet metallkärl. Genom att ställa in och reglera trycket över heliumvätskan på olika konstanta värden kan önskade konstanta temperaturer i området 4,2—1,0° K erhållas. Trycket hålles konstant vid ett inställt värde med hjälp av en nålventil i pumpledningen. (Särskild automatisk regleringsanordning har även konstruerats för detta ändamål.) Apparaturen medger ej framställning av temperaturer lägre än ca 1° K. För temperaturer under denna gräns är man hän-

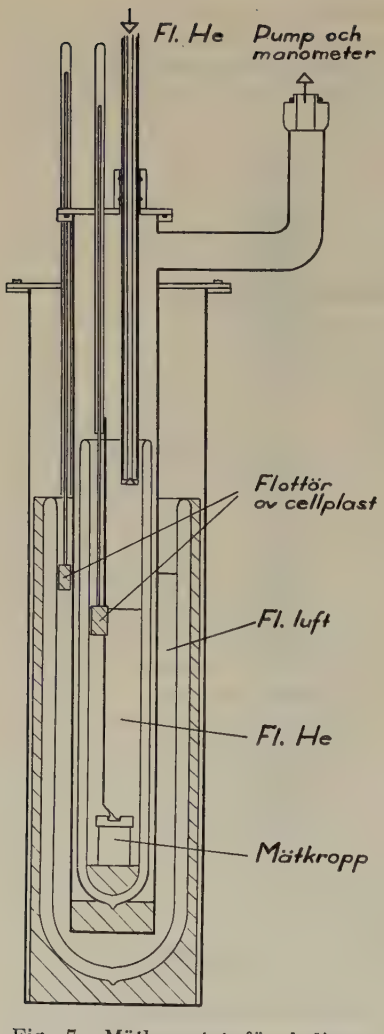


Fig. 7. Mätkryostat för heliumtemperaturer, använd vid Fysiska institutionen vid Tekniska högskolan i Stockholm.

Fig. 8. Detalj av transportkärl för flytande helium.

visad till en sedan ett par årtionden känd magnetisk metod vid vilken förkylningen sker med hjälp av flytande helium under lågt tryck (Elementa *39*, 29, 1956).

Flytande helium kan trots sitt låga ångbildningsvärme (6 cal/gram) förvaras även långa tider i dewar-behållare av speciell typ. Av fig. 8 framgår konstruktionen av ett sådant kärl. Det består av två i varandra ställda sammanbyggda dewar-kärl. I det yttre fylles flytande luft och i det inre flytande helium. Värmetillförseln till heliumvätskan kommer härvid att vara nästan helt bestämd av instrålningen från den yttre, blankpolerade ytan (90° K) av det inre termoskärlet till inre ytan (4° K). Värmetransporten på grund av värmeledning är mycket obetydlig hos dessa kärl (ca 1 % av strålningen).

Fig. 9 återger ett foto av den vid Fysiska Institutionen, KTH, före-

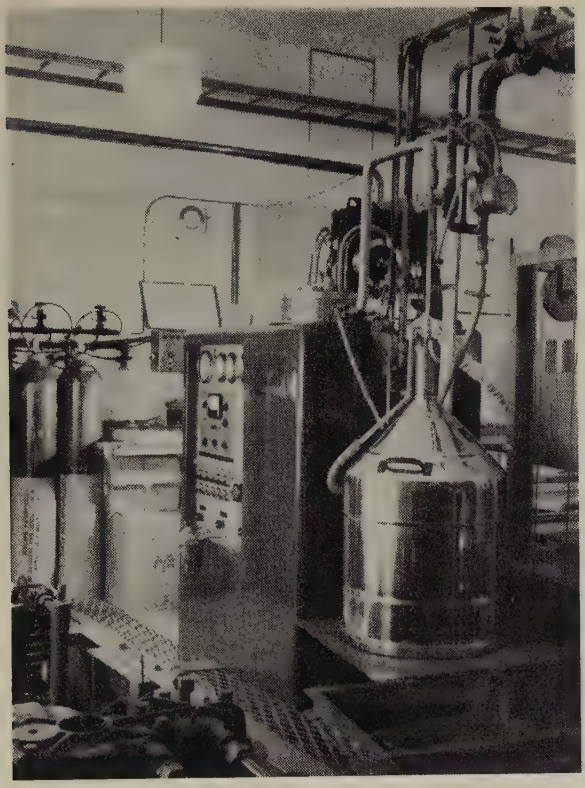


Fig. 9. Lågtemperaturanläggningen vid Fysiska institutionen, KTH. På bilden ser man även ett transportkärl för flytande helium.

fintliga Collins-maskinen, där även (till en del) kompressor, rörsystem, heliumcylindrar och ett transport- och förvaringskärl av konstruktion enligt fig. 8 kan ses. Kärlet rymmer 25 liter vätska. Förlusterna på grund av avdunstningen är av storleksordningen 0,3 liter helium per dygn. Under antagande av att instrålningen varierar med temperaturen som T^4 finner man med enkla räkningar, att heliumförlusterna skulle öka med en faktor av ca 100, om ingen flytande-luft-kylning användes (dvs. om heliumkärlets yttervägg vid användningen gåves rumstemperatur i stället för 90° K). Flytande-helium-förlusterna skulle alltså vid en sådan anordning uppgå till ca 30 liter per dygn. Härav framgår, att det är praktiskt omöjligt att förvara flytande helium i termosflaskor utan att hålla kärlets yttervägg kyld med flytande luft.

Collins-maskinen kan, om den förses med viss tillbyggnad, användas även för produktion av flytande väte. Produktionskapaciteten är härvid ca 4 liter flytande väte per timme. Genom insättning av ännu en kompressor kan produktionskapaciteten ökas till det dubbla. Kondenseringen av vätet sker på indirekt väg med helium som arbetsmedium. Heliumgasen utför det i det föregående beskrivna kretsloppet, men JT-ventilen hålles nu hela tiden stängd. Vätgasen tillföres apparaten under normalt tryck och får svepa omkring den med hjälp av heliumströmmen starkt kylda värmeväxlaren. Särskilt reningssystem för vätgasen erfordras.

Den vid KTH befintliga lågtemperaturanläggningen har efter anskaffandet (1955) utbyggts med ett återvinningssystem för heliumgasen. I denna apparatur ingår bl. a. en Hofer-kompressor med en kapacitet av 10 normal m^3 gas per timme, maximaltryck 160 atm. Gasen överföres medelst kompressorn till de stålcylindrar i vilka gasen levererats och normalt förvaras. Systemet blir genom denna anordning helt slutet, och heliumgasen återvinnes utan nämnvärda förluster vid experimenten. Apparaturen har i stor utsträckning utrustats med automatik, bl. a. för gasöverföringen under experimenten. Tillbyggnad av apparaten för produktion av flytande väte enligt ovan beskrivna metod är under utförande.

3. Några andra apparatkonstruktioner inom lågtemperaturtekniken. Av under senare tid nytillkommen apparatur för framställning av flytande helium och väte kan nämnas en av en fransk firma TBT, Grenoble, saluförd väte/helium-maskin, som arbetar efter den klassiska högtrycksmetoden med JT-effekten och förkylning med flytande kväve resp. flytande väte. I Tyskland har en helium-maskin konstruerats av W. Meissner. Principen är även här yttre arbete och JT-effekt. I sitt senaste utförande har denna maskin ungefär samma produktionskapacitet som Collins-maskinen. Maskinen tillhandahålles numera kommersiellt av Lindes Gesellschaft für Eismaschinen AG, München.

Bland nykonstruktioner av flytande-luft-maskiner må nämnas en av holländska Philips efter delvis ny princip (omvändningen av varmluftsmaskinen) konstruerad och saluförd maskin (Tekn. Tidskr. *88*, 1958, 831). I lågtemperaturlaboratoriets, KTH, utrustning ingår även en flytande-luft-maskin av nämnda fabrikat. En annan typ av flytande-luft-maskiner av relativt ny konstruktion, varav ett exemplar finnes vid Institutionen för Kylteknik, KTH, tillverkas av den schweiziska firman Termodyn, Zürich. Produktionskapaciteten är för bägge nämnda maskiner ca 5 liter flytande luft per timme.

Litteratur:

C. F. Squire, Low Temperature Physics, McGraw-Hill, 1953.

Heltalstrianglar med rationellt förhållande mellan vinklarna

Av lektor Tore Öberg, Norrköping

Heltalstrianglar, i vilka utom sidorna även andra sträckor, t. ex. höjder, medianer eller bisektriser äro rationella, ha en stor plats i den matematiska litteraturen i jämförelse med dem, där något rationellt samband råder mellan vinklarna.

I det följande skall jag härleda samtliga heltalstrianglar, där två av vinklarna ha ett rationellt förhållande samt ange därvid förekommande möjlighetsvillkor.

I triangeln ABC med heltalssidorna a, b, c äro vinklarna

$$A=nv,\quad B=mv,\quad C=\pi-(m+n)v \tag{1}$$

Man kan därvid antaga att

$$(a,b,c)=1,\quad (m,n)=1 \tag{2}$$

Jag vill först visa, att $\cos v$ är rationellt. Utgå från identiteten

$$\left(\frac{\sin mv}{\sin nv}+1\right)\left(\frac{\sin mv}{\sin nv}-1\right)=\frac{\sin(m+n)v}{\sin nv}\cdot\frac{\sin(m-n)v}{\sin nv} \tag{3}$$

Enligt sinusteoremet är

$$\frac{\sin mv}{\sin nv}=\frac{b}{a}\ \text{och}\ \frac{\sin(m+n)v}{\sin nv}=\frac{c}{a} \tag{4}$$

Av (3) och (4) följer, att $\dfrac{\sin(m-n)v}{\sin nv}$ är rationellt.

Sättes $m=nh+r$, där på grund av (2) talen n och r äro relativa primtal och $r<n$, så följer genom upprepad användning av (3) att $\dfrac{\sin nv}{\sin rv}$ och $\dfrac{\sin(n+r)v}{\sin rv}$ äro rationella. Då man nu kan sätta $n=rl+s$, där r och s äro relativa primtal och $s<r$, så blir på samma sätt även $\dfrac{\sin rv}{\sin sv}$ och $\dfrac{\sin(r+s)v}{\sin sv}$ rationella. På så sätt kan man fortsätta, varvid slutligen erhålles att uttrycket $\dfrac{\sin 2v}{\sin v}$ och därmed $\cos v$ blir rationellt, vilket skulle visas.

Sätt därför $2\cos v=k$, där k är ett rationellt tal p/q.
Enligt en trigonometrisk identitet är

$$\frac{\sin tv}{\sin v}=k^{t-1}-\binom{t-2}{1}\cdot k^{t-3}+\binom{t-3}{2}\cdot k^{t-5}-\ldots=\sum_{i=0}^{t_1}(-1)^i\binom{t-i-1}{i}\cdot k^{t-2i-1} \tag{5}$$

där

$$t_1=\left[\frac{t-1}{2}\right]. \tag{5 a}$$

Insättes i denna identitet n, m och $n+m$ i ordning i stället för t och p/q i stället för k, så erhåller man enl. (4) — så när som på en för a, b och c gemensam proportionalitetsfaktor, som enl. (2) kan uteslutas — följande uttryck för sidorna, där i övre gränserna för summorna använts beteckning enl. (5 a).

$$a=q^m\cdot\sum_{i=0}^{n_1}(-1)^i\binom{n-i-1}{i}\cdot p^{n-2i-1}\cdot q^{2i}=q^m\cdot f_n(p,q) \qquad (6)$$

$$b=q^n\cdot f_m(p,q),\quad c=f_{m+n}(p,q)$$

Då nv och mv äro vinklar i en triangel, har man $\cos v=\frac{p}{2q}>\cos\frac{\pi}{m+n}$

och alltså $g<\frac{p}{q}<2$, där $g=2\cos\frac{\pi}{m+n}$ (7)

Formlerna (6) ge nu, om man väljer alla de p- och q-värden, som uppfylla möjlighetsvillkoren (7), samtliga heltalstrianglar, i vilka två vinklar förhålla sig som heltalen $n:m$. Att samtliga lösningar erhållits framgår därav, att icke-rationella värden på k, som göra högra ledet i (5) rationellt, enl. ovan äro uteslutna.

I nedanstående tabell äro för några n- och m-värden införda de två lägsta p- och q-värdena samt därav följande värden på sidorna a, b, c jämte g-värden.

n	m	g	p	q	a	b	c
1	2	1	3	2	4	6	5
1	2	1	4	3	9	12	7
1	3	$\sqrt{2}$	3	2	8	10	3
1	3	$\sqrt{2}$	5	3	27	48	35
2	3	1,618	5	3	135	144	31
2	3	1,618	7	4	448	528	305
1	4	1,618	5	3	81	105	31
1	4	1,618	7	4	256	476	305
3	4	1,803	11	6	110160	116424	30421
3	4	1,803	13	7	288120	316589	146329
1	5	$\sqrt{3}$	7	4	1024	1220	231
1	5	$\sqrt{3}$	9	5	3125	5555	3024

Tillägg I

Ovan har visats att $\cos v$ är rationellt, $p/2q$. Om man sätter

$$p=2uv \qquad \text{eller} \qquad p=4xy$$

$$q=\tfrac{1}{2}(u^2+v^2) \qquad\qquad q=x^2+y^2$$

där u och v äro udda relativa primtal samt x och y relativa primtal av olika paritet så blir även $\sin v$ och därmed $\sin nv$ rationellt. Natur-

igtvis måste för givna n- och m-värden u, v, x, y väljas så, att möjighetsvillkoren (7) bli uppfyllda. Att $\sin nv$ är rationellt innebär enl. ytteoremet, att de erhållna trianglarna bli heronska dvs. ha rationell yta.

Exempel 1. $u=3$, $v=1$, $p=6$, $q=5$, $m=2$, $n=1$ ger
$a=25$, $b=30$, $c=11$, $T=132$, $\wedge B=2\cdot\wedge A$

Exempel 2. $x=2$, $y=1$, $p=8$, $q=5$, $m=3$, $n=1$ ger
$a=125$, $b=195$, $c=112$, $T=6552$, $\wedge B=3\cdot\wedge A$

Tillägg II

Följande enkla bevis för formeln (5) har jag tacksamt mottagit från lektor Agne Wahlgren.

Om man i formeln $\sin tv=\sin v\cdot S_t(k)$, $k=2\cos v$

utbyter v mot $\pi-v$, byter k tecken men $\sin tv$ förblir oförändrat, om t är udda, och byter tecken, om t är jämnt. Då måste S_t vara en jämn funktion av k för udda t men en udda funktion för jämna t. Man kan därför alltid sätta

$$S_t=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\cdot t_i k^{t-1-2i},\quad r=\left[\frac{t-1}{2}\right]$$

Av likheten $\sin(t+1)v+\sin(t-1)v=2\cos v\cdot\sin tv$

erhålles $S_{t+1}+S_{t-1}=k\cdot S_t$

Här ger koefficienterna för k^t

$$(t+1)_0=t_0,\qquad \text{men } 2_0=1\qquad \because\ t_0=1$$

För $t=2s$ ger konstanta termerna

$$(t+1)_s=(t-1)_{s-1},\qquad \text{men } 3_1=1\qquad \because\ t_r=1 \text{ för udda } t.$$

Generellt ger koefficienterna för k^{t-2i}

$$(t+1)_i-(t-1)_{i-1}=t_i \tag{a}$$

Genom bevis från $t-1$ och t till $t+1$ skall visas, att

$$t_i=\binom{t-1-i}{i} \tag{b}$$

Antag således, att (b) gäller för $t-1$ och t. Då är enligt (a)

$$(t+1)_i=\binom{t-1-i}{i-1}+\binom{t-1-i}{i}=\binom{t-1-i}{i-1}\left(1+\frac{t-2i}{i}\right)=\binom{t-1-i}{i-1}\cdot\frac{t-i}{i}=\binom{t-i}{i}$$

Att slutligen (b) gäller för $t=2$ och 3, finner man lätt.

Planeters bevegelse

Av lektor O. Lindstad, Oslo

I Elementa 42, 14, 1959 er det ved hjelp av kinematikk utledet en formel for krumningsradius i et kjeglesnitt i sin alminnelighet, nemlig

$$\varrho = \frac{p}{\cos^3 \alpha} \tag{1}$$

hvor p er den halve parameter og α er vinkelen mellom brennpunktradius og normal, se fig. 1.

Vi skal først se hvordan denne formel kan utledes på vanlig vis uten bruk av noen kinetisk betraktning. For sentral-kjeglesnitt har vi ligningene

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \tag{2}$$

Er X og Y det löpende punkt på tangenten, er dennes ligning

$$b^2xX \pm a^2yY = a^2b^2 \tag{3}$$

Ved hjelp av ordinær regning finner vi disse uttrykk for krumningsradius og avstanden H fra sentrum til tangenten, se fig. 2

$$\varrho = \frac{[(b^2x)^2+(a^2y)^2]^{\frac{3}{2}}}{(ab)^4} \qquad og \qquad H = \frac{(ab)^2}{[(b^2x)^2+(a^2y)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{4) (5}$$

Av (4) og (5) ser vi at ϱ og H er bundet sammen ved formelen

$$\varrho = \frac{(ab)^2}{H^3} \tag{6}$$

Vi vil videre uttrykke H ved hjelp av vinkelen α, se fig. 2.

$$H = \tfrac{1}{2}(h_1+h_2) = \tfrac{1}{2}(r_1 \cos\alpha + r_2 \cos\alpha) \tag{7}$$

eller

$$H = a \cos\alpha \tag{8}$$

Settes (8) inn i (6), får vi formel (1), idet vi setter $p = b^2/a$. Vi har her bare utledet formelen for sentral-kjeglesnitt, men det er lett å vise at den også gjelder for parabelen (slöyfes i denne artikkel).

Som vi forstår, er (1) differential-ligningen av annen orden for et kjeglesnitt med gitt brennpunkt og gitt parameter.

Ved hjelp av den kan vi på en meget enkel måte löse klassiske problemer med hensyn til planeters bevegelse.

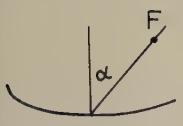


FIG.1

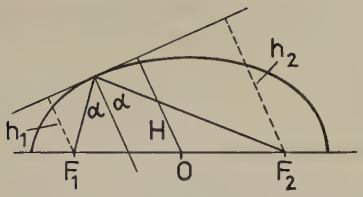


FIG.2

Oppgave I. Et (materielt) punkt beveger seg i et kjeglesnittskurve, slik at akselerasjonen A er rettet mot et brennpunkt i kjeglesnittet. Finn hvilket krav A må tilfretsstille.

Er v punktets hastighet og r brennpunktradien, kan flatesatsen skrives på følgende form

$$vr\cos\alpha = C \tag{9}$$

hvor C er en konstant. Videre har vi den generelle bevegelsesligning

$$A\cos\alpha = \frac{v^2}{\varrho} \tag{10}$$

Kombineres (1), (9) og (10), får vi som resultat

$$A = \frac{C^2}{pr^2} \tag{11}$$

dvs. at akselerasjonen må være omvendt proporsjonal med kvadratet av punktets avstand fra brennpunktet. (Cfr. Newtons lover.)

Oppgave II. Vi vil se på den omvendte oppgave: Et (materielt) punkt beveger seg slik at akselerasjonen A er rettet mot et fast punkt F og har en verdi som er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden r til F. Hva slags kurve må punktet beskrive?

Det nevnte krav til akselerasjonens störrelse kan skrives

$$A = \frac{k}{r^2} \tag{12}$$

hvor k er en konstant. Videre har vi som foran formlene (9) og (10), og disse sammen med (12) gir resultatet

$$\varrho\cos^3\alpha = \frac{C^2}{k} \tag{13}$$

Vi er m. a. o. kommet fram til ligning (1). Altså er den sökte kurve et kjeglesnitt, og dets p-verdi er

$$p = \frac{C^2}{k}$$

Ved universitets-studiet blir disse problemer behandlet både i mekanikk og astronomi, og som tidsskriftets lesere vil erindre, er matematikken temmelig innviklet med mer og mindre »kunstige» derivasjoner og integrasjoner. Mangen student har sikkert strevet atskillig med all denne regning, både da han skulle sette seg inn i saken og siden ved eventuell eksaminasjon. Men, som vi ser, er de mekaniske problemer meget enkle å löse, med et minimum av regning. Forutsetningen er da riktignok at utgangspunktet, kjeglesnittsligning (1) er kjent fra det matematiske pensum, som mekanikk og astronomi kan bygge på. Om mange studenter har et sådant grunnlag tör jeg ikke uttale meg om med sikkerhet, men sannsynlig er det ikke. Hensikten med denne artikkel er å henlede oppmerksomheten på formel (1) som en sentral formel for kjeglesnitt, slik at de matematikkstuderende blir helt fortrolige med den. Og med denne formel som grunnlag blir de klassiske problemer (I) og (II) i mekanikk og astronomi så enkle å löse at de nesten kan besörges på egen hånd av en våken student.

Bokanmälningar

E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1959. Pp. 95, 13s. 6d. net.

En vacker och intressant bok, som kan varmt rekommenderas. Författaren är en mångårig universitetslärare och mångsidig läroboksförfattare i ämnet matematik, som vet vad han talar om. Arbetet innehåller ett antal »fallacies», felslut (paradoxer), ordnade efter innehållet: geometri, algebra och trigonometri, differential- och integralräkning, komplex analytisk geometri (cirkelpunkternas oriktiga användning), limesprocesser av olika slag. Sist komma 14 blandade s. k. »howlers» med korta förklaringar blott till de 2 första. Annars genomgås först inom varje område »bevis» eller »lösningar» för samtliga »fallacies», därpå följer en undersökning av flertalet felslut. Dessa analyser, alltid givande, ibland ganska vidlyftiga, ge utblickar åt olika håll och sätta in felen i deras sammanhang. (I detta avseende skiljer sig föreliggande arbete fundamentalt från Lietzmann-Trier, *Wo steckt*

ler Fehler? Där lämnas det åt läsaren att söka reda upp sakerna på gen hand.)

Tag t. ex. ekvationen $\cot x+\operatorname{tg} 3x=0$, som ju löses ortodoxt via $g\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)=\operatorname{tg} 3x$, $x=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}n\pi$, så att $\operatorname{tg}^2 x=1$ (enklare vore kanske $\cos 2x=0$, $\operatorname{tg}^2 x=1$ direkt). Emellertid brukar ju $3x$ ibland ersättas ned $x+2x$ och den som gör så får, intet ont anande, $1:\operatorname{tg} x+$ $+(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x):(1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)=0$, $\operatorname{tg}^2 x=-1$. Maxwell, som gärna tillspetsar, låter jämförelsen mellan dessa två resultat gälla som ett »bevis» för att $1=-1$. Den här påträffade fallgropen är förrädisk nog och kommenteras väl.

En del av de anförda felsluten tillhöra de välkända, outrotliga, som varje matematiklärare stöter på, andra förefalla mer originella. Vad sägs om följande, »the binomial fallacy»: Sätt $n=0$ i $(a+b)^n=$ $=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+b^n$, så fås $1=a^0+b^0=2$? Se kommentaren! Här är man nära en »howler», som innebär att man efter ett groteskt, men i god tro genomfört missbruk av matematiska symboler och operationer icke bara når ett »riktigt» resultat, när detta är angivet i lydelsen (det fattades bara annat!) utan även får fram t. ex. riktiga ej på förhand kända rötter till ekvationer. Maxwell säger sig tro att de »howlers» han anför äro »genuine» och då så ... Många finna ju nöje i dåröversättningar och kriablommor, varför skulle icke de matematiska motsvarigheterna då även uppskattas på sina håll? »The real business» utgöres (som författaren själv säger) av de föregående kapitlen, vilka förvisso förtjäna att läsas och begrundas.

Josef Andersson

E. Asmus, *Einführung in die höhere Mathematik*, 3. verbesserte Auflage. Walter de Gruyter et Co, Berlin, 1959. 410 S., DM 24:—.

Enligt försättsbladet är detta »ein Hilfsbuch für Chemiker, Physiker und andere Naturwissenschaftler», vilket torde ange bokens allmänna karaktär. Man måste beundra författarens fyndighet att alltid hitta en, oftast flera, kemiska problemställningar, som kan användas som utgångspunkt vid införandet av varje nytt moment i framställningen. Vidare hyser man all respekt för hans i förordet uttalade förhoppning, att boken förutom att den måtte ge kemisten en viss räknefärdighet även måtte inspirera till studium av »rein mathematischer Bücher».

I boken behandlas differential- och integralkalkyl till ett omfång som väl närmast kan jämföras med motsvarande kurs vid våra tekniska läroverk, om man bortser från det sista avsnittet om funktioner av flera variabler. Differentialekvationer behandlas mycket knapphändigt. Stort utrymme ägnas däremot åt grafiska metoder för t. ex.

funktionsframställning, integration och studium av funktioner av flera variabler med nomogram. Förf. ger här många lyckade exempel.

Vad man saknar är ett avsnitt om sannolikhetskalkyl och matematisk statistik. Ett sådant avsnitt skulle avsevärt ha höjt värdet hos denna »Hilfsbuch». *Lennart Råde*

T. W. Anderson, *Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Wiley & Sons, New York. 1958. Pp. 374, $ 12.50.

Inom statistiken är teorien för endimensionella fördelningar bäst utvecklad. Tidigt började man även studera flerdimensionella (multivariata) fördelningsproblem, t. ex. med hjälp av korrelationsmetoder. Metoderna som utvecklades av Karl Pearson och hans efterföljare var ofta grova och, sett med våra ögon, matematiskt ofullkomliga.

R. A. Fishers härledning år 1915 av korrelationskoefficientens exakta fördelning, en betydande prestation även mätt med dagens mått, var den multivariata analysens första mera exakta resultat. Det följdes av flera, men först på de senaste tjugu åren har teorien fått en mer betydande plats inom statistiken. Många har bidragit härtill, t. ex. Hotelling och Wilks i USA, Bartlett och Wishart i England och en rad indiska statistiker såsom Bose, Nanda, Rao och Roy. Mestadels har man studerat stickprov från den flerdimensionella normalfördelningen, definierad av

$$ce^{-\frac{1}{2}x'Ax}$$

där A är en kvadratisk matris och x en kolumnvektor. Resultaten utgör därför generaliseringar i olika riktningar av de resultat som uppnåtts inom den »univariata» teorien vid utgångspunkt från den vanliga normala fördelningen.

De teoretiska insatserna har ännu inte lett till praktiska analysmetoder av större betydelse, om man bortser från psykologernas faktoranalys och antropologernas klassifikationsmetoder. Det är emellertid ytterst värdefullt att ett arbete nu föreligger, vari den nya teoriens innehåll noggrant beskrives. Andersons bok innehåller en mycket stor mängd fakta och är komprimerat skriven. Tidskrifternas mångskiftande innehåll finns här återgivet och systematiserat på ett översiktligt sätt. Det är imponerande att författaren gjort sig mödan att sammanställa även övningsexempel på detta avancerade gebit.

Läsaren bör ha god kännedom om den sedvanliga teorien, inhämtad t. ex. i Cramérs Mathematical methods of statistics eller någon likvärdig bok, likaså om vektor- och matrisalgebra. Till litteraturen för licentiatstudier i matematisk statistik utgör arbetet ett synnerligen betydelsefullt tillskott. *Gunnar Blom*

F. F. Stephan/Ph. J. McCarthy, *Sampling Opinions.* An Analysis of Survey Procedures. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 451, $ 12.00.

När Gallupmetoden kom i ropet på 30-talet, betraktades den med misstro av åtskilliga. En medlem av kongressen i USA uttryckte många åsikt då han 1944 med adress till dr Gallup utropade: »If you hit, then it is science, and if you miss, it is the uncertainty of politics.» Det kan väl till den angripnes försvar påpekas att valprognoser är och troligen alltid förblir ett opinionsundersökningarnas sorgebarn, t. ex. därför att man, enligt en ännu ej preciserad sociologisk osäkerhetsprincip, ingriper i skeendet genom att publicera prognoserna.

Numera är opinionsundersökningarnas anseende mycket bättre, och t. o. m. vårt ärevördiga statistiska ämbetsverk har begåvats med ett eget intervjuinstitut. Av stor betydelse är att statistiker engagerats i dylik verksamhet både här och på andra håll, varigenom urvalsmetoderna blivit strängare och kommit att grundas på den allmänna teorien för stickprovsundersökningar.

I föreliggande bok spelar de teoretiska problemen av statistisk natur en underordnad roll. Författarna diskuterar — delvis med tröttsam mångordighet — opinionsundersökningarnas speciella problem, orsakade t. ex. av att folk är svåra att få tag i, att de vill framställa sig i så god dager som möjligt (utom när de tillfrågas om inkomsten), att intervjuarna får olika resultat, osv. Anmälaren har i det rikhaltiga materialet haft särskild glädje av tre ting. Många detaljerade upplysningar lämnas om representativa amerikanska undersökningar som hittills redovisats i specialrapporter. Vidare är diskussionen kring frågan om kvotsamplingens värde välgörande måttfull. Många statistiker menar att denna metod — som lämnar intervjuaren viss frihet vid valet av intervjuoffer — alltid är förkastlig och att endast sannolikhetsurval kan tolereras. Författarna påpekar stillsamt, att många medicinska forskningsresultat nåtts genom klinisk prövning av mediciner på subjektivt utplockade patientmaterial. Varför då helt förkasta sådana förfaringssätt? Slutligen är den systematiska framställningen av planläggningsfrågorna av stort värde för var och en som har ansvar för dylikt arbete, det må gälla opinionsundersökningar eller ej.

Boken kräver i stort sett inga speciella förkunskaper. Referenserna är utmärkta och leder läsaren in i en intressant värld, befolkad av många typer av människor: statistiker, sociologer, psykologer, ekonomer. Arbetet vittnar om att man endast genom samarbete över gränserna kan behärska opinionsundersökningarnas mångskiftande problem.

Gunnar Blom

S. Kullback, *Information Theory and Statistics*. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1959. Pp. 395, $ 12.50.

Informationsteorien, utvecklad av bl. a. Nyquist, Hartley och framför allt Shannon, har dragit stor uppmärksamhet till sig under 50-talet. Det förvånar inte. Vem sysslar inte med informationsproblem? Rader av forskare har strömmat till för att se vad som står på, tekniker, matematiker, statistiker, teoretiska fysiker, neurofysiologer, filosofer, språkmän. De flesta humanister och kanske också medicinare har nog, sedan ivern svalnat, återvänt, respektfulla men rätt tomhänta, medan däremot de andra har fått många nya aspekter på sitt arbete eller nya problem att brottas med. På allra sista tiden har inte minst de ryska matematikerna funnit, att informationsproblemen är djupare än vad de i förstone verkar (se t. ex. den nya serien Arbeiten zur Informationstheorie med översättningar av ryska arbeten).

Informationsteorien har hittills omhuldats särskilt av teletekniker och andra som studerar informationsöverföring i teknisk mening. Grundläggande är Shannons definition på »informationsentropi»,

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

där p_i är sannolikheten att det i:te i en population av n meddelanden utväljes för överföring.

I sin bok visar den amerikanske statistikern Kullback, verksam vid George Washington University, att det angivna uttrycket kan begagnas som informationsmått även inom de traditionella delarna av den matematiska statistiken. Han bygger i fem korta kapitel upp en omfattande hypotesprövningsteori som kan sägas vara kusin till Neyman-Pearsons kända teori. De nya idéerna tillämpas i åtta långa kapitel på en mängd specialproblem, särskilt på sådana av multivariat typ.

Resultaten imponerar, men teorien är nog — bl. a. därför att den ofta leder till icke lineära uttryck — i krångligaste laget för att vinna allmän uppskattning. Författaren kunde nog för övrigt ha framställt sina tankar både enklare och mindre koncentrerat. Några dussin sidor i början går an, men när plötsligt nio trassliga lemmata uppradas föregångna av »bevisen lämnas åt läsaren», grips den samvetsgranne av ett svårmod som sedan endast glimtvis lämnar honom. Har man emellertid en lagom portion läslättsinne (samt ordentliga kunskaper i matematik och statistisk teori), får man goda utblickar över något som — måhända — blir en väsentlig del av 60-talets matematiska statistik.

Boken överflödar av övningsproblem och av referenser till olika delar av informationsteorien.

Gunnar Blom

W. J. Dixon/F. J. Massey, Jr., *Introduction to Statistical Analysis.* Sec. Ed. McGraw-Hill, New York, 1957. Pp. 488, $ 6.00.

Denna bok är välkänd bland statistiker och användes som kursbok vid svenska universitet och högskolor. När nu en andra upplaga utkommit, kan det vara anledning att påpeka att även andra än blivande statistiker kan ha nytta av den. Metodbeskrivningarna är utmärkta. Enkla metoder behandlas i stor omfattning. Tabellbilagan på över 100 sidor är mycket användbar vid praktiskt statistiskt arbete. Boken har två icke oväsentliga nackdelar. Planeringsfrågor behandlas styvmoderligt, och inga matematiska härledningar ges. Den är en god statistisk kokbok med många recept, varken mer eller mindre.

Gunnar Blom

M. G. Kendall/A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1. Distribution Theory.* Griffin & Co, London, 1958. Pp. 433, 84s.

Första upplagan av denna statistiska encyklopedi utkom 1943 och 1946 och anmäldes i Elementa, *30*, 1947, 186. Nu kommer första delen av en omarbetad upplaga, där ett decenniums sjudande utveckling skall beaktas. I denna del har inte så mycket hänt. Tre nya kapitel har tillkommit, bl. a. ett om order statistics, och övningsexemplen uppgår nu till över 300. Liksom tidigare är formelfloran yppig, kanske rentav något vildvuxen, och den matematiska elegansen och stringensen icke alltid sådana som man ville önska. Men varför klaga, när man fått en så tidsbesparande uppslagsbok i sina händer?

De utlovade andra och tredje delarna beräknas innehålla mera nytt, och de emotses med stora förväntningar. *Gunnar Blom*

Arnaud Denjoy, *Un demi-siècle (1907—1956) de notes communiquées aux académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei suivies par des observations et commentaires.* Deux vol. I. La variable complexe, II. Le champ réel. Gauthier-Villars, Paris, 1957, 589+99 p.

Denna »notsamling» (som förhandsanmäldes i Elementa *39*, 1956, 277) omfattar 166 noter, varav 158 i Comptes Rendus (Paris). Bortsett från enstaka tryckfel som rättats har texten återgivits in extenso på de 589 sidorna, medan de 99 upptages av kommentarer såsom förtydliganden, hänvisningar till senare forskningsresultat och i någon mån rättelser. Såväl kronologisk som systematisk innehållsförteckning finnes. Som framgår av den senares huvudrubriker för volym II, får begreppet »Le champ réel» tas i ganska vid mening: Métrique et topologie des ensembles et des fonctions de variables réelles — Topologie des espaces cartésiens ou analogues — Ordination et nombres ordinaux — Mécanique analytique. Calcul des probabilités.

Göran Björck

HUNTER ROUSE (Editor), *Advanced Mechanics of Fluids.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1959. Pp. 444, $ 9.75.

På grund av de hydromekaniska ekvationernas komplicerade form tvingas man ofta att göra mycket starka förenklingar, för att en analytisk behandling av ett hydromekaniskt problem skall vara genomförbar. Experimentella metoder kan med fördel tillgripas som underlag för realistiska förenklingar.

Den anmälda boken syftar till att förse den inom hydromekaniken verksamme forskaren med de kunskaper, som erfordras för att han med framgång skall kunna lösa avancerade hydromekaniska problem. Sålunda ägnas fyra kapitel på ca. 50 sidor vardera till behandling av hydromekanikens grundekvationer, potentialströmning, funktionsteoretiska hjälpmedel för tvådimensionella potentialproblem samt laminär strömning. Dimensionsbetraktelser och försöksplanering behandlas utförligt. Boken avslutas med tre kapitel om turbulens- och gränsskiktsteori. I boken finns 276 övningsexempel med svar och anvisningar.

Trots att icke mindre än nio författare medverkat ger boken ett enhetligt intryck. Framställningen som genomgående är klar och lättläst skulle vinna ytterligare, om den i större utsträckning stöddes på välkänt material ur den matematiska fysiken. Ett avsnitt på ca. 40 sidor om partiella differentialekvationer borde t. ex. uteslutas. Turbulensteorin skulle även kunna göras klarare om den anknöts till teorin för stokastiska processer. Ett frappant drag är det utmärkta sätt på vilket de matematiska modellerna anknytes till verkliga vätskors strömning. Speciellt belysande är de diskussioner som ägnas komplicerade hydrodynamiska problem. Författarna visar hur man med hjälp av förenklade matematiska modeller och välplanerade experiment får ett allt fastare grepp om det verkliga problemet.

Karl-Johan Åström

G. STEPHENSON/C. W. KILMISTER, *Special Relativity for Physicists.* Longmans, Green and Co, London/New York/Toronto, 1958. Pp. 108, 18/-net.

Titeln vill antyda att boken vänder sig till experimentalfysiker och andra som vill och behöver veta något om relativitetsteori utan att intressera sig för de i och för sig fascinerande matematiska och geometriska aspekterna. Tensorer är sålunda bannlysta, och formlerna uttryckes genomgående i tredimensionellt vektorskrivsätt. Givetvis måste då en del av elegansen gå förlorad. Men trots den tredimensionella ramen har författarna kunnat införa och utnyttja sådana viktiga hjälpmedel som 4-vektorer och '6-vektorer' (det sista en benämning som gärna kunde avskrivas), varigenom invariansöverläggningar fortfarande blir naturliga; detta förefaller lyckat. Framställningen är

detaljerad men koncis — kanske något mera formell än titeln låter förmoda.

Transformationen av Maxwells ekvationer diskuteras i början i direkt anslutning till Lorentztransformationen (vilket nog kan verka onödigt avskräckande på en och annan läsare). Förutom sedvanliga kinematiska och dynamiska samband ges i fortsättningen flera nyttiga tillämpningar, bl. a. hämtade från den moderna fysiken. Till de mera negativa överraskningarna får man nog räkna beskrivningen av stöt mellan två partiklar. I stället för att få den belysning av sambandet mellan massa och energi som kunde ligga nära till hands, bibringas läsaren uppfattningen att endast elastiska stötar kan behandlas naturligt i relativitetsteorien.

Kort sagt är detta en bok som säkert fyller ett behov; den gör det på ett ibland bra men enligt anmälarens åsikt inte alltid idealiskt sätt.

S. Bertil Nilsson

J. W. Leech, *Classical Mechanics.* Methuen's Monographs on Physical Subjects, London, 1958. Pp. 149, 12s 6d net.

En utmärkt liten bok i rationell mekanik. Den förutsätter av läsaren en grundläggande mekanikkurs — ehuru viktigare begrepp kort repeteras — och ger sedan en överskådlig och modern presentation av den analytiska mekaniken: Lagrange- och Hamiltonformalism, variationsprinciper, transformationsteori, Poissonklammer. Avslutningskapitlen utsträcker formalismen till kontinuerliga system, relativistisk mekanik och klassisk fältteori. Uppläggningen påminner delvis om Goldsteins kända lärobok. En experimentalfysiker kan finna Goldsteins bok alltför omfattande, samtidigt som han har fördel av en orientering inom detta klassiska område, inte minst som bakgrund till kvantmekanik och statistisk mekanik. För honom men också för teoretikern och för andra intresserade kan denna välskrivna exposé varmt rekommenderas. Kapitlet om fält innehåller f. ö. material som man annars brukar finna endast i specialiserade arbeten.

S. Bertil Nilsson

P. Grivet/A. Balquière, *Le bruit de fond.* Cours d'Électronique, tome IV. Masson, Paris, 1958, 496 p., 6500 fr.

Boken ingår i en serie i ämnet elektronik, redigerad av Grivet, som omfattar följande delar: del I elektronrör, II förstärkare, pulsteknik och servosystem, III transistorer, IV brus och V valda problem inom elektroniken.

Det aktuella arbetet del IV begränsas till att omfatta kopplingar, då frekvensen är högst ett par hundra MHz. I gengäld behandlas det klassiska radioområdet ingående. Stoffet grupperas i tre huvudområden: brusets fysikaliska ursprung, brus genom linjära nät såväl

aktiva som passiva samt brus genom icke linjära element. Beskrivning av brusets ursprung i resistanser, elektronrör och halvledare sker i nära anslutning till experimentella fakta, och framställningen kompletteras med teoretiska modeller vilka används för beräkning av bl. a. spektrala egenskaper hos signalerna. Behandlingen av brus genom linjära nät utgör bokens tyngdpunkt. I de aktiva näten ingår elektronrör eller transistorer. Ett stort antal förstärkarkopplingar analyseras och brusfaktorn beräknas samt jämförs med experimentella värden. Ett speciellt avsnitt ägnas bredbandiga kretsar, där det kaskodkopplade förstärkarsteget analyseras utförligt. För brus genom icke linjära element sammanfattas de viktigaste resultaten för olika detektorer och modulationstyper. Av mer nyhetsbetonat intresse är brusets inverkan på amplitud- och frekvensstabilitet hos oscillatorer, vilket något berörs.

Boken torde lämpa sig för studerande i radioteknik och elektronik vid de tekniska högskolorna och för andra som önskar få en första orientering inom brusområdet. Sammanställningen av brusfaktorer för olika kopplingar synes vara av intresse även för sådana som redan är verksamma inom radiotekniken. Litteraturförteckningen är föredömligt ordnad. *Lars-Henning Zetterberg*

W. Galbraith, *Extensive Air Showers*. Butterworths Scientific Publications, London, 1958. Pp. 211, 40/—.

Sedan början på detta århundrade har det varit känt att en från världsrymden kommande, joniserande strålning träffar vår jord. Denna kosmiska strålning består huvudsakligen av protoner och α-partiklar, men även tyngre kärnor ingå. Strålningen är mycket energirik, dess energispektrum sträcker sig från omkring 10^9 eV upp till 10^{17}—10^{18} eV. När den primära strålningen tränger in i atmosfären bildas sekundära partiklar genom kärnprocesser av olika slag vid stötar med luftens syre- och kvävekärnor. De stora skurarna av sekundärpartiklar, som observeras nere vid jordytan, härröra ifrån primärpartiklar med energier i den övre delen av energispektrum.

Dr W. Galbraith har under en lång följd av år i Harwell studerat de stora skurarnas problem och äger alltså goda förutsättningar för att skriva en bok härom. I föreliggande arbete redogör författaren på ett berömvärt sätt för den teoretiska och experimentella utvecklingen inom området. Genom att lägga tyngdpunkten på förklaring av de fysikaliska förloppen och utelämna långa matematiska härledningar har framställningen blivit överskådlig och lättläst, samtidigt som talrika referenser till grundläggande verk göra det möjligt för den intresserade att tränga djupare in i ämnet.

De första kapitlen behandla mekanismen vid bildandet av en skur.

Författaren redogör för kaskadteorien med tillämpningar på såväl elektron-foton- som nukleonkomponenten och övergår därpå till teorien för partikeltätheten inom skurar med beskrivning av olika mätmetoder och mätresultat.

Följande kapitel behandlar μ-meson- och nukleonkomponenten, skurarnas frekvensspektrum som funktion av partikelintensitet samt det primära energispektrum. I kap. 7 kommer författaren in på frågan huruvida det finns några tidsvariationer i antalet skurar och därmed också tidsvariationer i de högsta primära partikelenergierna. I samband härmed ges en översikt av olika teorier för den kosmiska strålningens uppkomst och vilka konsekvenser förekomsten av de högsta partikelenergierna har för dessa teorier.

I det sista kapitlet beskrivs hur Čerenkov-effekten utnyttjas vid studiet av de stora skurarna. *Ernst-Åke Brunberg*

Richard B. Dow, *Fundamentals of Advanced Missiles*. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 567, $ 11.75.

Boken behandlar just vad titeln anger, nämligen grunderna för robottekniken. Den ger nog inte särskilt mycket för den lekman, vars huvudsakliga intresse är inriktat mot robotars användning. Däremot kan boken varmt rekommenderas till dem, som har anknytningar till flygområdet eller tänker skaffa sig grundligare kunskaper om detta nya och fantasieggande område.

Historiskt sett är robottekniken en utveckling av flygtekniken och ballistiken, men numera utgör dessutom teleteknik och regleringsteknik väsentliga beståndsdelar, varför man med fog kan anse den nuvarande robottekniken vara en syntes av flygteknik och elektroteknik, bägge fattade i vidsträckt bemärkelse. Detta avspeglas tydligt i ämnets disposition i boken. Dess första del är ganska konventionellt flygteknisk och behandlar aerodynamik, robotmotorer och flygmekanik, medan dess andra och ungefär lika stora del behandlar mikrovågors egenskaper, radar samt egenskaper hos och apparatur för infraröd strålning. I övrigt behandlas regleringsteknik och dess tillämpningar på robotstyrning, matematisk statistik med olika exempel på robottillämpningar, navigering samt systemanalys.

Svårigheten att inom en bokvolym behandla så många och till sin natur olika ämnesområden är uppenbar. Författaren har emellertid i stort sett lyckats få med det väsentligaste för varje delområde och det med utgångspunkt från ganska elementära förkunskaper hos läsaren. Vidare torde avvägningen mellan de olika avsnittens utrymmen vara ganska god för olika kategorier av läsare oberoende av om eventuella förkunskaper ligger antingen åt det elektrotekniska eller flygtekniska hållet. Möjligen kan man anmärka på att en bok med den

aktuella målsättningen inte behandlar robotars struktur- och materialproblem.

Framställningen är klar och välillustrerad, men boken är inte direkt lättläst på grund av dess stora mängd av kunskapsstoff, vilket gör den mest lämpad som handbok. Några detaljer, som man kan anmärka på, är den rikliga förekomsten av fotnoter, som stör läsningens kontinuitet, samt det förhållandevis ringa antalet referenser, vilket emellertid av författaren förklaras med hänvisning till den militära sekretessen inom robotområdet.

F. Hjelte

G. F. Kinney, *Engineering Properties and Applications of Plastics.* John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 278, $ 6.75.

Plasterna blir för varje år en allt mer betydande materialgrupp, som kompletterar och ersätter andra råvaror. På grund av den snabba expansionen saknas dock ofta erfarenhet och information om materialens möjligheter eller som författaren uttrycker det: »Hur kan man bäst utnyttja plasterna, draga fördel av deras utmärkta egenskaper och göra effekten av deras naturliga begränsningar så liten som möjligt?»

Detta har i boken besvarats genom att det på ett överskådligt sätt lämnas orientering om plasternas uppbyggnad och allmänna egenskaper liksom möjligheter och begränsningar hos enskilda typer. I tio kapitel behandlas lika många av våra vanligaste plaster eller grupper av plaster med hänsyn till deras kemi, användningsområden, bearbetning och egenskaper. Här berörs också utvecklingstendenser och nya plasttyper såsom exempelvis polypropen.

För olika typer av elaster, såväl naturgummi som syntetiska kvaliteter, redogörs i ett kapitel och i ett annat beskrivs de olika bearbetningsmetoderna för termo- och duroplaster.

Av speciellt intresse för konstruktörer och andra tekniker, som ibland måste »tänka i plast», är tre kapitel om mekaniska, termiska och elektriska egenskaper hos plaster. Den avslutande delen utgörs av en koncentrerad översikt över typiska reaktioner inom organisk kemi.

Boken är skriven för både dem som arbetar inom plastindustrin och för dem som av andra anledningar måste öka sitt vetande om plast och utgör ett bra tillskott till den inte alltför rika floran av koncentrerad litteratur på området. Vad man möjligen vill efterlysa, är mera konstruktionsdata som lämpliga godstjocklekar, släppningsvinklar etc. samt rekommendationer för formgivning. En och annan bild över intressanta användningsområden skulle ha lättat upp texten, som ibland blir litet tung, mycket på grund av frånvaron av underrubriker i kapitlen.

Olle Jonsson

Lipman Bers, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*. J. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 164, $ 7.75.

Denna bok om aerodynamik har skrivits speciellt för matematiker av en matematiker, vilket har satt sin prägel på ämnesurvalet. Således behandlas praktiskt taget endast tvådimensionell strömning. Anledningen är den, att rörelseekvationerna i det tvådimensionella fallet kan lineariseras genom att man som nya oberoende variabler inför hastighetskomponenterna. Härvid erhåller man en partiell differentialekvation (hodografekvationen), som är linjär i det tvådimensionella fallet men ej i det tredimensionella. Följaktligen är endast det förra fallet »intressant» ur matematisk synpunkt i så måtto, att det går att behandla med hjälp av traditionella metoder för linjära differentialekvationer.

Författaren, som är professor i matematik vid New York University, har under ett tiotal år sysslat inom detta område med tonvikt på renodlade matematiska frågor i sammanhanget, såsom frågor beträffande lösningars existens och entydighet. Ungefär totalt en femtedel av boken ägnas åt dessa frågor. Underljudsströmning och transonisk strömning (ljudfartsströmning) behandlas i två kapitel var. I dessa redogöres kortfattat för det väsentligaste i de viktigaste arbeten som publicerats inom dessa områden. I enlighet med författarens intressen behandlas i fråga om underljudsströmning praktiskt taget enbart lösningar baserade på hodografekvationen, medan de approximativa metoder som finnes utarbetade endast flyktigt vidröres. I det transoniska kapitlet ägnas relativt stort utrymme åt den »transoniska kontroversen», dvs. åt frågan om stötfri transonisk strömning med ett överljudsområde inbäddat i underljudsströmning kan existera för profiler, vilka uppfyller vissa villkor om konvexitet och glatthet, men i övrigt är godtyckliga. I verkligheten har sådan strömning överhuvudtaget aldrig observerats vid vindtunnelförsök, trots att den enligt den transoniska teorin är möjlig för vissa profiler. Det är betecknande för författarens intressen, att denna fråga ägnas större utrymme än strömning med stötar, vilken ur aerodynamisk synpunkt är den intressantaste. Författaren säger också i bokens inledning, att han har framhävt matematiska metoder snarare än de bakomliggande fysikaliska problemen, och att han har ej endast betonat användningen av matematik inom strömningsläran utan även »tillämpningen» av strömningsläran som en källa för matematiska problem och begrepp. Med detta i minne bör boken vara av visst intresse för »rena» matematiker, som önskar upplysningar inom ett modernt tillämpningsområde, samt för hydro- och aerodynamiker med intresse för frågor rörande matematisk stringens.

Det bör påpekas, att de aerodynamiska problem som behandlas i boken numera är av mindre intresse för aerodynamiker. Dels har transoniska problem på senare tid minskat i aktualitet, dels är man numera på det klara med att strömningen, i de fall man är intresserad av, praktiskt taget alltid är dominerad av tredimensionella effekter.

Boken är välskriven och lättläst vartill bidrager en god typografi. För en oinvigd läsare torde det dock vara svårt att följa med i de mycket kortfattade beskrivningarna av de matematiska lösningsmetoderna. Den mycket utförliga referenslistan innehåller även den omfattande ryska litteraturen på området. *M. Landahl*

Dean A. Watkins, *Topics in Electromagnetic Theory.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 118, $ 6.50.

Denna bok ger en klar och logisk framställning av några speciella områden av stor vikt inom den elektromagnetiska teorien för mikrovågskomponenter, såsom vandringsvågröret, riktkopplaren, spiralantennerna, spiralfördröjningslinjen och de olika typer av förstärkare som utnyttjar enbart rymdladdningsvågor. Vidare ingår en kort fenomenologisk behandling av ferriternas mikrovågsegenskaper, särskilt med hänsyn till de olika anordningar som bygger på Faradayrotationen.

De matematiska metoderna för behandling av periodiska överföringssystem och av koppling mellan utbredningsmoder genomgås särskilt.

Ehuru problemen, såsom författaren påpekar, är valda nästan slumpvis, torde boken på grund av sin systematiska och pedagogiska uppläggning få stort värde för personer, som arbetar inom den teoretiska mikrovågstekniken. *Preben H. Blichert-Toft*

Gérard de Vaucouleurs, *L'exploration des galaxies voisines.* Masson et Cie, Paris, 1958, 151 p., 1600 fr.

Denna bok ingår i »Collection Évolution des Sciences», som enligt förlagets reklam riktar sig till läsare i vetenskaplig miljö i vidaste mening. Den skall ge en sammanfattande framställning av utvecklingen inom viktiga vetenskapliga områden av författare som själva bidrar till framstegen. Boken skall kunna förstås av dem som intresserar sig för ämnet ifråga, antingen som »amatörer», som lärare i skolorna eller som forskare inom angränsande områden. I detta fall bör alltså teoretiska fysiker, experimentalfysiker och astronomer som arbetar inom ämnets skilda grenar kunna läsa boken med behållning. Den skall också vara lämplig att användas vid den högre undervisningen.

de Vaucouleurs är själv en av de ivrigast verksamma forskarna

inom den viktiga gren av astronomin som sysselsätter sig med studiet av galaxerna, öarna i världsalltets arkipelag. (»Spiralnebulosorna» är ett viktigt slag av galaxer, och Vintergatan, vårt eget stjärnsystem, är sannolikt en typisk spiralgalax.) Förf. började sin bana i Frankrike och har under flera år varit verksam på observatorier på södra halvklotet, särskilt vid det stora Mt Stromlo-observatoriet i Australien. På sistone har han arbetat vid några av de stora amerikanska institutionerna. Han uppfyller sålunda väl kravet som skicklig fackman, och recensenten är böjd för att anse boken vara tillräckligt förståelig för de skilda kategorier till vilka den enligt förlaget vänder sig. Samtidigt är den utan tvivel av intresse också för fackmännen.

Som bokens titel anger, begränsar sig de Vaucouleurs till att behandla de oss relativt närbelägna stjärnsystemen. En möjligast detaljerad kännedom om dessas uppbyggnad, om skilda slag av galaxer samt inte minst om spridningen kring normaltyperna är en nödvändig förutsättning för att man med framgång skall kunna studera världsalltet i stort. Under senare år har avgörande förskjutningar skett beträffande grundläggande ting på vilka de kosmogoniska teorierna vilar. En fastare grund än den gamla måste läggas, innan man kan teckna en tillförlitligare bild än den hittillsvarande av galaxernas världsallt. Frågor inom detta komplex ämnar de Vaucouleurs ta upp i en senare bok, och de skymtar därför mer i förbigående i den nu aktuella boken.

Kapitel för kapitel granskar förf. galaxforskningens resultat, observationer såväl som teoretiska arbeten. Först gäller det morfologi och klassifikation. Sedan behandlas avståndsindikatorerna, varvid läsaren får börja från grunden med trigonometriska parallaxer och olika indirekta metoder som används för objekt inom vårt stjärnsystem. När man något så när tillfredställande kan bestämma avstånden till närbelägna galaxer, har man möjlighet att också beräkna dessas absoluta ljusstyrkor och dimensioner. Mätningar av spektraltyper, färg och polarisation behandlas därnäst. Till ett särskilt kapitel förs motsvarande mätningar inom den radioastronomiska sektorn. Det är naturligt att större delen av framställningen härvid gäller vad vi vet om radiostrålningen inom vårt eget stjärnsystem; läsaren får härigenom bättre möjlighet att följa den sjudande utveckling som förestår.

Slutkapitlet handlar om rotationsförhållandena hos galaxerna och om hur man bestämmer massan för dessa objekt. Här upptas också de kontroversiella frågorna om rotationsriktningen till behandling. Släpar armarna efter eller öppnar de sig i rotationsriktningen? de Vaucouleurs ansluter sig till dem som håller före att spiralgalaxernas armar släpar efter och han betecknar detta som »den allmänt omfattade teorin». Man kunde kanske ha väntat sig en mera utförlig redogörelse för de skäl som talar för den andra uppfattningen, vars främsta talesman är

professor Lindblad; sålunda får man intet veta om den tolkning som sammanbinder ljusspridnings- och polarisationseffekter och som gjorts av docent Aina Elvius (se Elementa *39*, 1956, 269) fastän förf. i ett föregående kapitel redogjort för de i samma avhandlingar publicerade observationsdata.

För en svensk är det uppmuntrande att märka att de Vaucouleurs inräknar de av svenska forskare gjorda insatserna inom galaxastronomin bland de väsentliga. Namn som Knut Lundmark, Bertil Lindblad och Erik Holmberg citeras sålunda ofta och gärna.

Boken är väl illustrerad. I texten är det gott om diagram och förklarande teckningar, delvis anslutande sig till de fotografiska avbildningarna i den serie av planscher varmed boken kompletteras.

Tord Elvius

E. Leimanis/N. Minorsky, *Dynamics and Nonlinear Mechanics*. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 206, $ 7.75.

Föreliggande arbete ingår i serien »Surveys in Applied Mathematics», som utgives av »Applied Mechanics Reviews» i samarbete med »Office of Naval Research». Det avser att ge en översikt över nyare litteratur, i första hand den icke engelskspråkiga litteraturen, varför ryska arbeten ägnas stor uppmärksamhet. Boken är icke avsedd för specialister utan vänder sig till en större publik med någon kännedom om här behandlade områden.

Författarna har bidragit med var sin del. Den första delen (110 s.) utgöres av Leimanis: »Some Recent Advances in the Dynamics of Rigid Bodies and Celestial Mechanics». Problemet att bestämma en fast kropps rörelse kan delas upp i två delproblem, tyngdpunktens rörelse och kroppens rörelse relativt tyngdpunkten. Första delen av Leimanis' arbete ägnas åt sistnämnda delproblem. Detta har lösts fullständigt endast i tre specialfall, för vilka redogöres. Utöver dessa fall kan problemet lösas för speciella begynnelsevillkor och massfördelningar i ytterligare några fall. I kapitel 2 diskuteras ytterballistikens rörelseekvationer.

Andra delen av Leimanis' arbete behandlar ett annat klassiskt, olöst problem: tre-kroppar-problemet. Även här redovisas först de fall, där lösningen är känd. Avslutningsvis diskuteras generaliserade *n*-kroppar-problem, som erhålles om Newtons gravitationslag ersättes av en allmännare lag.

Den andra hälften av boken utgörs av Minorsky: »The Theory of Oscillations». På 87 sidor ges en översikt av metoder som användes för att lösa icke-lineära differentialekvationer. På detta begränsade utrymme blir givetvis framställningen ganska skissartad, men den ger ändå en god överblick och innehåller en omfattande bibliografi,

varför den kan rekommenderas som utgångspunkt för fortsatta studier. I första kapitlet diskuteras topologiska egenskaper hos lösningskurvorna i fasplanet. Kapitel 2 behandlar möjligheterna att finna approximativa lösningar. Svängningar i nästan lineära system diskuteras i tredje kapitlet, medan i det sista kapitlet svängningar i system som avsevärt avviker från lineära behandlas med relaxationsmetoden.

Svante Jahnberg

E. M. Grabbe/S. Ramo/D. E. Wooldridge, (Editors), *Handbook of Automation, Computation and Control.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958, Pp. 1000, $ 17.00.

De tre ledande männen i The Ramo-Wooldridge Corporation — E. M. Grabbe (Consultant on Automation), S. Ramo (Executive Vice President) och D. E. Wooldridge (President) — har tillsammans redigerat denna handbok i vilken en stab på ytterligare 104 specialister medverkat. Redaktörerna har tidigare samarbetat i en bok om automation.

Avsikten med denna handbok är att tillhandahålla praktiskt värdefulla data för forskning, utveckling och konstruktion inom områdena servoteknik och databehandling. Det nu föreliggande första bandet (av totalt tre) innehåller »Regleringsteknikens grundprinciper». Under denna rubrik har samlats: Allmän matematik med bl. a. matristeori, sannolikhetskalkyl och statistik, numerisk analys, operationsanalys, informationsteori och servoteori, omfattande: systemkompensation, inverkan av brus och icke linjära system.

Handboken är närmast utformad som en mycket kortfattad lärobok med talrika referenser (ca 550 st.). Sålunda saknas inte ens genomräknade exempel, utan sådana förekommer hela boken igenom. De olika kapitlens omfång förefaller vara väl avvägda. En del formler och tabeller förekommer på flera ställen, men detta torde vara ofrånkomligt — och i viss mån fördelaktigt — i ett verk av denna storlek.

Uppställningen av materialet är föredömlig liksom bilderna och typografin. Man kan alltså med de allra största förväntningar se fram emot utgivandet av de två kommande banden. *Bertil Mårtensson*

J. Bower/P. M. Schultheiss, *Introduction to the Design of Servomechanisms.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 519, $ 13.00.

Författarna, John L. Bower och Peter M. Schultheiss, har båda erhållit sina Ph. D.-grader vid Yale University och har därefter tjänstgjort som lärare vid detta universitet. Den förre är dock numera knuten till University of California. Båda har mångårig erfarenhet av såväl den teoretiska som den praktiska sidan av servotekniska problem.

Avsikten med boken är att ge en metod som gör det möjligt att

systematiskt angripa ett servotekniskt problem utifrån givna förutsättningar i fråga om ett systems »godhet».

Boken är lättillgänglig utan att därför vara elementär. Som exempel härpå kan väljas »härledningen» av Laplacetransformen över Fourierintegralen och de komplexa och reella Fourier-serierna. Men boken tar med sig läsaren även till mer avancerade tekniska områden. Sålunda upptas en stor del av dess utrymme av root-locus-metoden, statistiska undersökningar av servosystem, analys och syntes av ickelinjära system samt syntes av »minor loops», dvs. lokalt återkopplade kretsar. Som beräkningshjälpmedel användes genomgående Bodediagrammens rätlinjeapproximationer. Utgående från Bodes relationer ger författarna en lämplig metod för beräkning av fasförskjutningar. Enligt förordet har en stor del av bokens innehåll genomgåtts i kurserna vid Yale under de senaste tio åren. Författarna har således haft goda tillfällen att välja och vraka i sitt material. Boken är med sina många exempel väl tillrättalagd för självstudier, t. ex. som påbyggnad på våra svenska högskolekurser till vilket ändamål den rekommenderas på det varmaste. *Bertil Mårtensson*

Dick Lundqvist, *Moderna halvledarkomponenter.* HAFO publ. nr 3. Stockholm 1958, 69 s., 53 fig., kr. 5:—.

Halvledarfysiken utgör grunden till transistortekniken — precis som elektronfysiken till rörtekniken. Författaren har de senaste åren hållit kurser i halvledarfysik för teleteknikerna på Tekniska Högskolan och häftet »Moderna halvledarkomponenter» utgör kärnan i dessa kurser.

I häftet behandlas grunddragen av halvledarteorien, egenledning, störledning, pn-övergången, halvledarmaterialen och deras framställning och egenskaper.

Det är välgörande för alla som arbetar med transistortillämpningar att det nu finns en svensk publikation som på ett sakligt men ändå lättillgängligt sätt fyller luckan mellan fysiken och tekniken. Det är — som författaren påpekar — väsentligt för ingenjörer som arbetar med halvledarelement att ha en fysikalisk förståelse för halvledarmaterialens och halvledarkomponenternas möjligheter och begränsningar. Behovet av en sådan insikt i de fysikaliska sammanhangen bakom bl. a. transistorn blir större ju längre man arbetar med transistorer och transistorkretsar, och det är kanske framför allt de som tidigare har praktiska tekniska erfarenheter, som här ges tillfälle till ett fördjupat studium under mycket sakkunnig ledning.

Författaren är desutom verksam inom standardiseringsarbetet avseende halvledartekniken och boken blir därför även formellt en ledstjärna i fråga om lämplig svensk nomenklatur på halvledarområdet.

G. Markesjö

Semiconductor Abstracts. Abstracts of Literature on Semiconducting and Luminescent Materials and Their Applications. Volume IV — 1956 Issue. Editor: E. Paskell. John Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1959. Pp. 456, $ 12.00.

Som rubriken anger utgör boken en samling litteraturreferat — 1462 till antalet. De har utarbetats på Battelle Memorial Institute under medverkan av Electrochemical Society, Inc.

Referaten är inordnade under följande rubriker: Germanium, kisel, karbon, selen m. fl., intermetaller, sulfider m. fl., oxider, halider samt teori. Boken innehåller såväl författarregister som ämnesregister.

Det är givetvis av stort värde att det inom den digra halvledarlitteraturen utkommer systematiskt ordnade referat, vilket ju är till stor hjälp för forskare vid litteratursökning. Man skulle önska en något snabbare utgivning av dessa referat — 1956 ligger tre år tillbaka i den snabba utvecklingen på halvledarområdet — men framför allt är man tacksam för att det verkligen finns institutioner som lägger ned ett sådant arbete för att underlätta litteratursökandet för de många som arbetar med halvledare världen över just nu.

G. Markesjö

Donald P. Campbell, *Process Dynamics.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 316, $ 10.50.

Författaren är väl mest känd genom boken Principles of Servomechanisms, som han skrev tillsammans med Gordon S. Brown. Föreliggande bok, som utgivits efter Campbells död, kännetecknas av hans två huvudsakliga verksamhetsområden, nämligen som professor i servoteknik vid M. I. T. och som konsulterande ingenjör med regleringsteknik som specialitet.

Materialet är uppdelat på sex huvudområden med följande kapitelrubriker och huvudsakliga innehåll. 1. Kinematics of Materials Handling. Materialflöde, blandning och kvalitetskontroll vid en tillverkning. 2. Fluids in Motion. Vätskors och gasers flödesreglering. 3. Forming, Propulsion and Guidance. Regleringsproblem i samband med fabrikation av bandformiga varor, exempelvis sprutpressning och pappersstillverkning. 4. Thermal Process Dynamics. Värmeväxlares temperaturreglering. 5. Mass Transfer Dynamics. Diffusion, främst torkning och destillation. 6. Chemical Process Dynamics. Reaktionskontroll. — Som avslutning ges en samling problem (utan lösningar) samt två appendices med översikt över symbolerna i blockdiagram och signalflödesdiagram resp. kortfattad resumé av Fourier- och Laplacetransformering.

Författaren visar i detta arbete åter sin förmåga att på ett lättfattligt sätt introducera ämnet och redogöra för dess fysikaliska lagar. I förordet säger han, att processen och dess dynamik kommer i första hand och att han försökt väva in regleringsprinciper i samband härmed. Talrika och klara figurer gör att resonemangen är lätta att följa, och speciellt tilltalande för en regleringstekniker är, att förf. så ofta det är möjligt använder blockdiagram med tillhörande överföringsfunktioner. Inte minst härigenom bör boken ha goda utsikter att bli en klassiker för ingenjörer som sysslar med industriell regleringsteknik. Det förutsättes, att läsaren har en viss kännedom om servoteknikens grunder.

Åke Persson

A. P. French, *Principles of Modern Physics.* Wiley & Sons, New York/ Chapman & Hall, London, 1958. Pp. 355, $ 6.75.

Denna bok förefaller mig vara en utmärkt repetitionskurs för den som syftar mot högre studier eller för den som kanske har sina universitetsår relativt långt bakom sig och därför känner sig börja förlora överblicken och känslan för sambandet mellan fysikens olika domäner. Däremot synes den mig vara av föga värde som första kursbok i fysik för högskolestudier. Urvalet av stoffet är intresseväckande och logiskt väl genomtänkt. På några ställen, t. ex. på sid. 58, förutsättes läsaren vara bekant med formler, som nog borde ha förklarats utförligare i texten för att kunna ge läsaren intrycket av full förståelse av ifrågavarande härledning av uttrycket för den anomala dispersionen. Detta är desto mera befogat som författaren på sid. 80 åter baserar diskussionen på dessa samband.

Ett betydande antal räkneuppgifter ger den energiske läsaren möjligheter till fördjupad förståelse för den moderna fysikens grundprinciper.

Wilhelm Forsling

John Schröder, *Radiobyggboken,* del 2. Nordisk Rotogravyr, Stockholm, 1959, 199 s., kr. 16: —, inb. kr. 18: 50.

Första delen av Radiobyggboken utkom 1956 (anm. i Elementa *40,* 226, 1957), och däri gavs en introduktion till elektronikapparatbyggandets hantverkslära. I andra delen får vi lära oss bygga mer avancerade apparater, såsom hi-fi-förstärkare, kortvågsmottagare och -sändare, TV-mottagare och t. o. m. ett elektroniskt musikinstrument.

Framställningen är aptitretande och den med tid och gosselynne försedde har förvisso stort nöje av de föreslagna arbetena.

Stig Mathisson

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2219) *Från hörnen A, B, C i en triangel fälles mot en rät linje normalerna* AA_1, BB_1, CC_1. *På dessa bestämmes punkterna* A_2, B_2, C_2 *så, att* $A_1A_2 : A_1A = B_1B_2 : B_1B = C_1C_2 : C_1C = k$ *till storlek och tecken. Visa, att normalerna från* A_2, B_2, C_2 *mot BC, CA, AB råkas i samma punkt.*

X.

2220) *I cirkeln med medelpunkten O är inskriven en regelbunden 26-hörning,* $A_0A_1 \ldots A_{25}A_0$. *Om* O_1 *och* O_2 *är spegelbilderna av O i diagonalerna* A_0A_{24} *och* A_1A_5, *så är sträckan* O_1O_2 *lika lång som sidan i en i cirkeln O inskriven liksidig triangel.* *V. Thébault*

2221) *En rät linje L skär kurvan* $y = f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ *i n distinkta punkter. Vinkelkoefficienterna för kurvtangenterna i dessa punkter och för L är* $k_1, \ldots, k_n$ *respektive k. Visa, att* $\sum_1^n 1 : (k_\nu - k) = 0$.

N. J.

Enklare matematiska uppgifter[2]

2222) I den rätvinkliga triangeln *ABC* är *AM* och *AH* resp. median och höjd mot hypotenusan *BC*. Från *H* fälles normalen *HN* mot *AM*. Visa, att figuren innehåller fem sträckor, av vilka tre är aritmetiska, geometriska och harmoniska medier till de två återstående. — Om $1/a - 1/b = 1/b - 1/c$, är b harmoniskt medium till a och c.

Efter Pappos, omkring 300 år e. K.

Svar: *AM*, *AH* och *AN* är respektive aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medium till *BH* och *HC*. Pappos uppger sig ha fått denna uppgift av en anonym matematiker. Själv kunde han inte finna det harmoniska mediet.

2223) Medelpunkterna till tre lika cirklar, som skär varandra två och två, är ekvidistanta punkter på en rät linje. Denna figur innehåller (på flera sätt) fem sträckor, av vilka tre är aritmetiska, geometriska och harmoniska mediet till de återstående, sedan man tillfogat en rät linje utom centrallinjen.

Svar: Centrallinjen för cirklarna I, II, III, skär III i *P* och *Q*, *M* är centrum för den mellersta, II, *G* ena skärningspunkten mellan I och

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm NÖ.

[2] Uppg. 2222—2224, 2227—2228 är insända av *X.*, 2225—2226, 2229—2230 av *S. B.*

III, A mellan II och III. Linjen AM skär III på nytt i H. Då är MA, MG och MH de tre medierna till PM och MQ.

2224) För vilka värden på a har ekvationen $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{a-1}{a}\right)^2=$ $=\frac{x}{x+1}+\frac{a-1}{a}$ dubbelrot? Vilken är dubbelroten?

Svar: $a_1=\sqrt{8}-2$, $a_2=-(\sqrt{8}+2)$; 1.

2225) Beräkna $\sqrt{a^4b^3+a^3b^4}$, om a och b är rötterna till ekvationen $133x^2+397x-589=0$.

Svar: 2,212.

2226) I en likbent triangel är inskrivna cirkelns radie 2 cm och avståndet från höjdernas skärningspunkt till basen 3 cm. Bestäm ytan.

Svar: $21\frac{1}{3}$ cm^2.

2227) I triangeln ABC är vinkeln A 90°. Höjden från A råkar BC i H, och bisektrisen från B råkar AC i E. Visa, att sidorna bildar en geometrisk serie, om HE är parallell med AB.

2228) Om kurvan $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ har en maximi- och en minimipunkt, så går linjen $3f'''(y-f)+f'f''=0$ genom dessa punkter och centrum. — Ledning: Visa först, att ekv. är lineär i x och y.

2229) Från en rörlig punkt P på räta linjen $x=-3$ drages tangenter till parabeln $y^2=4x$. Tangenterna råkar vertextangenten i A och B. Sök orten för medelpunkten till cirkeln PAB.

Svar: Linjen $x+1=0$. — Om normalen från fokus F mot den givna linjen (som kan vara godtycklig), råkar denna i N, är orten mittpunktsnormalen till FN med undantag av punkter, som hör till P inom parabeln.

2230) En likbent triangel med toppvinkeln α är inskriven i en cirkel. En transversal genom cirkelns medelpunkt delar det ena benet i förhållandet $m:n$ från basen räknat. I vilket förhållande delas det andra benet (från basen räknat)?

Svar: $[2\cos\alpha-m/n]:1$. — Om i en likbent triangel en transversal t delar de lika sidorna och höjden i förhållandena f_1, f_2 och f_h, är $f_1+f_2=2f_h$. Går t genom omskrivna cirkelns centrum, är $f_h=\cos\alpha$.

Lösningar till uppg. 2193—2195

2193) *Tre cirklar med radierna r_1, r_2 och r_3 skär varandra under räta vinklar två och två. Hur stor är ytan av den triangel, som har sina hörn i cirklarnas centra?* *X.*

1. Om de från spetsen av ett trirektangulärt hörn utgående kanterna är r_1, r_2 och r_3, blir de övriga kanterna, $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ osv., sidor i den efterfrågade triangeln. Enligt en känd sats (Elementa *34*, 132, 1951) är

kvadraten på »hypotenusaytan» lika med summan av kvadraterna på »katetytorna», varför svaret blir $\frac{1}{2}(r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2)^{\frac{1}{2}}$. *N. J.*

2. Om medelpunkterna är M_1, M_2 och M_3 samt h_3 höjden från M_3, erhålles enligt kordasatsen $r_3^2=(h_3+k)(h_3-k)$ eller $h_3^2=r_3^2+k^2$, där $2k$ är den gemensamma kordan för M_1 och M_2. Då vidare $r_1r_2=k\sqrt{r_1^2+r_2^2}$ och $4T^2=h_3^2(r_1^2+r_2^2)=(r_3^2+k^2)(r_1^2+r_2^2)$, erhålles svaret ovan.

L. Henriksson

Även löst av *S. Nyström*, *V. Gamst*, *E. Samén* och *H. Simonsson*

2194) *G är tyngdpunkten till tetraedern ABCD. Kantlinjerna BC, CA och AB betecknas med respektive a, b och c och de motstående kanterna med respektive a_1, b_1 och c_1. Visa, att* $\Sigma(a^2-a_1^2)^2=4\{4\Sigma GA^4-(\Sigma GA^2)^2\}$. *V. Thébault*

Är M och M_1 mittpunkterna av AB respektive CD, så är G mittpunkten på MM_1. Enligt diagonalsatsen är $c^2=2(GA^2+GB^2-2GM^2)$ och $c_1^2=2(GC^2+GD^2-2GM_1^2)$, varav $c^2-c_1^2=2(GA^2+GB^2-GC^2-GD^2)$. På samma sätt är $a^2-a_1^2=2(GB^2+GC^2-GA^2-GD^2)$ och $b^2-b_1^2=2(GA^2+GC^2-GB^2-GD^2)$. Till sist blir

$$\Sigma(a^2-a_1^2)^2=12\Sigma GA^4-8\Sigma GA^2\cdot GB^2=16\Sigma GA^4-4(\Sigma GA^2)^2$$ *S. B.*

Även löst av *N. J.* och *X.*

2195) *Cirkelbågen ABCD delas av punkterna B och C i tre lika delar. Om man uppritar den cirkelbåge AD, som ligger på samma sida om kordan AD och tangerar kordan AB, kan det inträffa att den av dessa bågar bildade »månskäran» har samma yta som femhörningen ABCDE(A), där E är skärningspunkten mellan linjerna AC och BD. Sök villkoret härför.* *Efter Hippokrates, 5:e årh. f. K.*

Uppgiften kan generaliseras:
Cirkelbågen $ABC\ldots MN$ delas av B, C, …, M i $n>2$ lika delar; cirkelbågen AN på samma sida om AN tangerar NC; S är skärningspunkten mellan AM och NB. Månskäran och $(n+2)$-hörningen $AB\ldots MNS(A)$ är likytiga, då — och endast då — $AS:AB=\sqrt{n:2}$.

Ett cirkelsegments form är enligt korda-tangentsatsen bestämd av vinkeln v mellan kordan och bågens tangent i en ändpunkt. 1) Den kortare bågen AN, del av en cirkel med centrum U, går genom S, ty US är mittpunktsnormal till AN, så att vinkeln $USN=90°-v=UNS$. 2) Av ovanstående kriterium följer, att de n kongruenta segmenten AB, …, MN utanför polygonen är likformiga och ytlika med de två kongruenta AS, SN innanför densamma. Därav satsen.

I specialfallet är $AB:AE=\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Sättes $AB=1$, $AD=x$, är $AE=\sqrt{1{,}5}$, $EC=\sqrt{1{,}5}:x$. Enligt Ptolemeiska satsen erhålles $x+1=1{,}5(x+1)^2:x^2$, varav $x=(3+\sqrt{33}):4$ och $\cos AED=-(\sqrt{33}-1):8$. Gradtalet för de fem segmentbågarna är alltså 53,62°. *X.*

Fyllnadsprövning efter studentexamen

Augusti 1959

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Undersök kurvan $y=\frac{x}{x^2+x+1}$ med avseende på maximipunkter, minimipunkter och asymptoter, samt konstruera den i dess huvuddrag.
2. Enligt en berömd sats av Euler ligger i varje triangel tyngdpunkten, den omskrivna cirkelns medelpunkt och höjdernas skärningspunkt på en rät linje, »Eulers linje». Bevisa denna sats för det specialfall, då triangelns hörn i ett rätvinkligt koordinatsystem är (−8; 0), (8; 0) och (4; 8).
3. En regelbunden polyeders totala begränsningsyta och volym, uttryckta i motsvarande enheter, betecknas med A respektive V. Antalet sidoytor i polyedern är s och antalet kantlinjer k. Då gäller följande samband:

$$\frac{A^3}{V^2}=18k\,\mathrm{tg}\left(\frac{s}{k}\cdot 90^\circ\right)\left[\sin^2\left(\frac{s}{k}\cdot 90^\circ\right):\sin^2\left(\frac{s-2}{k}\cdot 90^\circ\right)-1\right]$$

   Bevisa riktigheten härav för den regelbundna tetraedern, kuben och den regelbundna oktaedern.
4. Från punkten (−18; 0) drages tangenterna till parabeln $y^2=8x$. Vidare drages den tangent, vars riktningskoefficient är 1. De tre tangenternas skärningspunkter utgör hörn i en triangel. Bevisa, att den kring denna triangel omskrivna cirkeln går genom parabelns fokus.
5. I punkterna $P_1(x_1;\ y_1)$ och $P_2(x_2;\ y_2)$ på hyperbeln $xy=1$ drages normalerna till hyperbeln. Visa, att skärningspunkten mellan dessa normaler obegränsat närmar sig en viss punkt N, då $x_2\to x_1$, samt bestäm koordinaterna för N.
6. I ekvationen $\mathrm{tg}\,x+a\,\mathrm{tg}\,2x=3\,\mathrm{tg}\,3x$ är a en reell konstant. Om a uppfyller vissa villkor, är $x=n\pi$, där $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, de enda reella lösningarna till ekvationen. Bestäm dessa villkor.
7. En godtycklig punkt P på en ellips sammanbindes med storaxelns ena ändpunkt A. Genom A drages normalen mot linjen AP, och på denna avsättes sträckan $AR=AP$. Sök och upprita den kurva, som punkten R beskriver, då P beskriver den givna ellipsen.

[1] Enligt gymnasiereformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

8. Ett papper har formen av en rektangel $ABCD$, där sidorna AB och BC är 2 dm respektive 3 dm. Papperet vikes längs en rät linje EF på sådant sätt, att hörnet A faller i en punkt A' på sidan BC. Punkten E ligger på sidan AB, och punkten F kan ligga på sidan CD eller på sidan DA. Vinkeln $A'AE$ betecknas med v. Bestäm längden av sträckan EF som funktion av v, beräkna dess största respektive minsta värde, och åskådliggör slutligen funktionen i ett diagram.

Resultat: 1. Max. i $(1; \frac{1}{8})$, min. i $(-1; -1)$; $y=0$ asymptot. 5. $N(\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_1^{-3};\ \frac{3}{2}y_1+\frac{1}{2}y_1^{-3})$. 6. $\frac{4}{3}\leqq a\leqq 4$ samt $a=0$. 7. Orten utgöres av de ellipser i vilka den givna övergår efter vridning $\pm 90°$ kring A. 8. Om $EF=y$ dm och vinklarna anges i bågmått, erhålles $y=3:\cos v$, då F ligger på CD, dvs. för $0\leqq v\leqq v_1$, där $v_1=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}=0{,}3649$. Då v växer från 0 till v_1, ökas y från 3 till 1,5 $(\sqrt{15}-\sqrt{3})=3{,}21$. Om F ligger på DA, är $v_1\leqq v\leqq\frac{1}{4}\pi$ och $y=2:(\sin 2v\cdot\cos v)$. När v går från v_1 till $\frac{1}{4}\pi$, avtar y till $1{,}5\sqrt{3}=2{,}60$ för $v=v_2$, där $v_2=\arccos\sqrt{2:3}=$ $=0{,}6156$ för att sedan växa till $\sqrt{8}=2{,}83$ för $v=\frac{1}{4}\pi$.

Reallinjens biologiska gren

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie bildar första, tredje och fjärde termerna en aritmetisk serie. Bestäm den geometriska seriens kvot.
2. Beräkna ytan av det ändliga område i xy-planet, som begränsas av kurvan $y=3x^2-x^3$ och tangenten till kurvan i dennas maximipunkt.
3. En triangel ABC har hörnet A i punkten $(5; -2)$. Ekvationerna för medianerna från hörnen B och C är $x=2$ respektive $y=2$. Ange ekvationerna för triangelns sidor.
4. I triangeln ABC delar höjden från hörnet A sidan BC innantill i förhållandet 1 : 4 och vinkeln A i förhållandet 1 : 2. Bestäm vinkeln A.
5. Lös ekvationen $2^{1{,}507}+3^{1{,}507}=4^x$.
6. I en regelbunden tetraeder $OABC$ delar punkten D kantlinjen AB i förhållandet 1 : 2. Bestäm vinkeln mellan linjen OD och planet ABC.
7. En kropp är sammansatt av en rät cirkulär cylinder och en rät cirkulär kon, vars bottenyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Konens sida och cylinderns höjd är båda 1 cm. Bestäm konens höjd, så att den sammansatta kroppens volym blir så stor som möjligt, och beräkna konens toppvinkel i detta fall.
8. I triangeln ABC träffar höjden från hörnet A sidan BC i punkten H. Sträckorna AH, BH och CH är 6 cm, 12 cm respektive 6 cm.

Två med höjden AH parallella transversaler, som båda skär sidan BC, har ett inbördes avstånd av 6 cm. Uttryck ytan av den del av triangeln ABC, som ligger mellan transversalerna, som funktion av avståndet från hörnet B till den närmaste transversalen. Undersök denna funktion och åskådliggör den grafiskt. Definitionsområdet måste beaktas.

Resultat: 1. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. 2. $6\frac{\pi}{4}$ ytenh. 3. $AB: 8x+3y-34=0$, $BC: 4x-3y+10=0$, $CA: 2x+3y-4=0$. 4. 105,80°. — Om $B>C$, spegla B i höjden och använd bisektrissatsen. 5. $x\approx 1{,}507$. 6. 67,79° ($\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{6}$). 7. Höjden är $(\frac{2}{3}\sqrt{3}-1)$ cm $=0{,}1547$ cm och toppvinkeln 162,20°. 8. Om den sökta ytan är y cm² och avståndet från hörnet B till den närmaste transversalen är x cm, erhålles $y=3x+9$ för $0\leqq x\leqq 6$ och $y=-\frac{3}{4}x^2+12x-18$ för $6\leqq x\leqq 12$. Då x växer från 0 till 6, ökas y linjärt från 9 till 27 för att sedan över max. värdet 30 (för $x=8$) avta till 18.

Allmänna linjens sociala gren

1. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ är den längre av de parallella sidorna AB 5 cm och de lika stora sidorna BC och AD vardera 3 cm. Diagonalen AC bildar rät vinkel med sidan BC. Beräkna sidan CD.

2 och 3. Se biol. gren 1 och 2.

4. En person insatte under ett år vid varje månads slut 100 kr i en bank, där räntan beräknades efter 3,5 % och lades till kapitalet vid årets slut. Hur mycket skulle han vid självdeklarationen i februari följande år för detta bankkontos vidkommande uppta som ränteinkomst per den 31.12 och som värde av de innestående medlen vid årets utgång? Ingen uttagning eller annan insättning än de nämnda gjordes under året på ifrågavarande konto. Öretalen medtages inte i deklarationen.

5, 6 och 7. Se biol. gren 3, 5, 6.

8. En kropp är sammansatt av en rät cirkulär cylinder och en rät cirkulär kon, vars bottenyta sammanfaller med cylinderns ena basyta. Konens sida och cylinderns höjd är båda 1 cm. Bestäm den sammansatta kroppens volym som funktion av konens höjd, och undersök, hur volymen varierar, då konens höjd ändras. Ange särskilt, när volymen antar sitt största värde, och beräkna konens toppvinkel i detta fall.

Resultat: 1. 1,4 cm. 4. 19 kr och 1219 kr resp. 8. Volymen $=\frac{1}{3}\pi(1-x^2)(3+x)$ cm³, där x cm är konens höjd ($0<x<1$). Volymen växer från π cm³ till max. $=16\pi\sqrt{3}:27$ cm³ för $x=\frac{1}{3}\sqrt{12}-1$ för att sedan avta till 0. Den sökta toppvinkeln $=162{,}20°$.

Matematiska uppgifter för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x^2+1{,}5xy=ay \\ y^2+1{,}5xy=ax \end{cases}$ där a är en bekant storhet.
2. Se social gren 1.
3. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av tredje och fjärde termerna 0,75 och summan av samma termers inverterade värden 6. Beräkna seriens summa.
4. I en likbent triangel ABC är de lika stora sidorna AB och AC vardera 10 cm och vinkeln A 18°. En cirkel går genom A och tangerar sidan BC i punkten B. Bestäm längden av den cirkelbåge, som faller inom triangeln.
5. Upprita kurvan $y=(x-1{,}6)^2+(x-1{,}7)^2+(x-1{,}8)^2$. Bestäm medelst diagrammet eller på annat sätt kurvans minimipunkt.
6. I triangeln ABC är sidorna AB, BC och AC 14 cm, 13 cm respektive 15 cm. Punkterna E och F är fotpunkterna för höjderna från B respektive C. Beräkna längden av sträckan EF.
7. Med hypotenusan BC och kateten AB i den likbenta rätvinkliga triangeln ABC som diametrar uppritas halvcirklar, som ligger utanför ABC. Mittpunkterna M och N på halvcirkelbågarna sammanbindes genom en rät linje, som skär sidan BC i punkten E och sidan AB i punkten F. Hur stor del av sträckan MN utgör sträckan EF?
8. På periferien av en cirkel med radien 23 cm ligger en oändlig mängd punkter, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ... Punkten P_3 ligger på bågen P_1P_2, punkten P_4 på bågen P_2P_3, punkten P_5 på bågen P_3P_4 osv. Bågen P_1P_2 är 24 cm, bågen P_2P_3 20 cm, bågen P_3P_4 $16\frac{2}{3}$ cm osv. Båglängderna bildar alltså en geometrisk serie. Bevisa, att punkterna P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ... obegränsat närmar sig en bestämd punkt P. Bestäm dennas läge. Beräkna därefter vinkeln P_1OP, där O är cirkelns medelpunkt.

Resultat: 1. $x_1=y_1=0$; $x_2=y_2=\frac{2}{5}a$; $x_3=a$, $y_3=-2a$; $x_4=-2a$, $y_4=a$. 3. Summan är 4. 4. $x:\cos 9°=3{,}18$ cm. 5. (1,7; 0,02). — Om $x-1{,}7=z$, blir $y=3z^2+0{,}02$, som har min. för $z=0$. 6. 7,8 cm ($\triangle AEF \sim \triangle ABC$, osv.). 7. $\frac{1}{6}$. — E är mittp. på MN och F tyngdp. i $\triangle OBN$, där O är BC:s mittp., osv. 8. Bågen $P_1P=13\frac{1}{11}$ cm och $\angle P_1OP=32{,}6°$.

Realgymnasiet. Allmän kurs

3. Toppvinkeln i en likbent triangel är 108°. Bestäm exakt och så förenklat som möjligt förhållandet mellan triangelns bisektriser.

6. Bevisa riktigheten av formeln $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$, där n är ett helt positivt tal.
8. Bevisa, att om sambandet $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ gäller mellan vinklarna i en triangel ABC, så är triangeln rätvinklig. Bevisa även, att omvändningen av denna sats gäller.

Uppg. 1, 2, 4, 5, 7 se biol. gren 1, 3, 6, 5, 8.

Resultat: 3. Förhållandet är 2.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. Bestäm det största värde, som funktionen $x+\sqrt{2-x^2}$ kan anta.
2. Bestäm och upprita geometriska orten för mittpunkten på en brännpunktsradie till en hyperbel.
3. En parabels symmetriaxel sammanfaller med x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Linjen $3x-2y-3=0$ är tangent till parabeln, och linjen $y=1{,}5$ är diameter till de kordor i parabeln, som är parallella med den nämnda tangenten. Bestäm parabelns ekvation.
4. Undersök funktionen $y=\cos^3 x-\sin^3 x$ med avseende på maxima och minima samt nollställen. Upprita därefter motsvarande kurva i dess huvuddrag.
5. Cirkeln $x^2+y^2=1$, räta linjen $y=4$ samt punkten (3; 0) är givna. En annan cirkel har sin medelpunkt C på den givna linjen och går genom den givna punkten. Ange det intervall på den givna linjen, i vilket punkten C måste ligga, för att de båda cirklarna skall ha minst en punkt gemensam.
6. En rät linje tangerar cirkeln $x^2+y^2=4$ och skär koordinataxlarna i punkterna A och B. Bestäm orten för mittpunkten på sträckan AB, och upprita ortkurvan i dess huvuddrag.
7. Två kongruenta ellipser har samma medelpunkt, och deras storaxlar är vinkelräta mot varandra. Kurvorna skär varandra i punkter, som utgör hörn i en fyrhörning med ytan A. De gemensamma tangenterna till ellipserna begränsar en annan fyrhörning med ytan A'. Uttryck förhållandet $A':A$ som funktion av ellipsernas excentricitet e, och undersök, hur förhållandet varierar med e.

Resultat: 1. Största värdet är 2. 2. Om O är hyperbelns centrum, $2a$ transversalaxeln och F ifrågavarande fokus, så är orten den hyperbel med transversalaxeln a, vars brännpunkter ligger i O och F. 3. $4y^2=18x-27$. 4. Perioden är 2π, nollpunkter o. inflex.punkter $(\frac{1}{4}\pi+n\pi;\ 0)$, symmetriaxlar $x=\frac{3}{4}\pi+n\pi$. Max. i $(2n\pi;\ 1)$, $(\frac{3}{2}\pi+2n\pi;\ 1)$ och $(\frac{3}{4}\pi+2n\pi;\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})$. Min. i $(\frac{1}{2}\pi+2n\pi;\ -1)$, $(\pi+2n\pi;\ -1)$ och $(\frac{7}{4}\pi+2n\pi;\frac{1}{2}\sqrt{2})$. 5. $0\leqq x\leqq 3$. 6. Orten är kurvan $x^{-2}+y^{-2}=1$. Kurvan består av fyra grenar, en i varje kvadrant. För grenen i första kvadr. är $x>1$ och

$y>1$ samt $x=1$ och $y=1$ asymptoter; grenen tangerar cirkeln i $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Genom tre successiva vridningar på 90° kring origo erhålles övriga grenar. 7. $A' : A = \frac{1}{2}(2-e^2)^2 : (1-e^2)$, där $0<e<1$; förhållandet växer monotont från gränsmin. 2 till ∞.

Uppgifter i fysik

1. En person tillföres under ett år genom födan en betydande energimängd. Vad kostar en lika stor mängd elenergi efter ett pris av 10 öre per kWh, om man utgår ifrån att personen tillföres i genomsnitt 2700 kcal per dygn? Vid beräkningen sättes ett år till 365 dygn.
2. En flaggstång, som väger 100 kg, skall fällas för ommålning. Den är vridbar i ett vertikalplan kring en sprint, som går genom stångens längdaxel och är vinkelrät mot denna. Avståndet mellan sprinten och flaggstångens nedre ände är $\frac{1}{10}$ av stångens längd. Stångens tyngdpunkt ligger på $\frac{1}{3}$ av stångens längd, räknat från nedre änden. När stången lutar 45° mot horisontalplanet, hålles den i detta läge av en rak stötta, som understöder den i dess mittpunkt. Stöttan är vinkelrät mot stången och belägen i samma vertikalplan som denna. Angiv till storlek och riktning den kraft, varmed stången påverkar sprinten. Friktionen lämnas utan avseende. Figur kräves. I denna skall anges förutom den efterfrågade kraften även de krafter, som påverkar stången.
3. En rät, cirkulär, ihålig kon, vars halva toppvinkel är 60°, roterar kring sin axel, som är vertikal. Konens spets är därvid vänd nedåt. I en punkt A på konens insida befinner sig en partikel i jämvikt i förhållande till konen. Då konens varvtal överstiger 125 eller understiger 75 varv per minut, är denna jämvikt ej längre möjlig med partikeln i A. Vid vilket varvtal skulle partikeln kunna ligga kvar i A, även om konens insida vore glatt? Figur kräves. I denna skall anges de krafter, som använts vid lösningen.
4. En jämntjock glasplatta har i genomskärning formen av en rektangel $ABCD$ med en på ena kortsidan AB ställd, utåtvänd halvcirkel, vars diameter sammanfaller med AB. AB är 64 mm; BC är 125 mm. M är mittpunkten på CD, och O är mittpunkten på AB. Från M utgår ljusstrålar, som träffar halvcirkeln utan att dessförinnan ha reflekterats mot en långsida i rektangeln. De av dessa strålar, som träffar cirkellinjen närmare linjen MO än 24 mm, bryts och fortsätter ut i luften. Vilket värde erhålles härur på glasets brytningsindex? Figur återgivande strålgången erfordras.
5. På en optisk bänk har två plana skärmar placerats. Båda står vinkelrätt mot bänkens längdaxel. I den ena skärmen finns ett cirkulärt hål med väl markerad kant. Hålet belyses, och med hjälp

av en tunn positiv lins avbildas det på den andra skärmen. Linsens huvudaxel är parallell med bänkens längdaxel och går genom hålets medelpunkt. Den cirkulära bildens diameter är då 2,5 cm. Om linsen förskjutes längs bänken 20 cm, erhålles åter en skarp bild på skärmen. Bildens diameter är nu 0,9 cm. Beräkna linsens brännvidd. Figur med bildkonstruktion erfordras.

6. Av två ackumulatorer har den ena emk 1,9 V och den andra emk 1,3 V. Inre resistanserna är resp. 0,02 ohm och 0,04 ohm. Den förra ackumulatorns positiva pol och den senares negativa pol förenas med en homogen och jämntjock tråd, vars resistans är 1,20 ohm. Med en annan likaledes homogen och jämntjock tråd, vars resistans är 0,84 ohm, förenas de återstående polerna. Beräkna spänningen mellan de båda trådarnas mittpunkter. Av svaret skall framgå, vilken av de båda mittpunkterna som har den högsta potentialen. Kopplingsschema erfordras.
7. Ett ackumulatorbatteri med konstant emk och obetydlig inre resistans slutes med en ledning, som innehåller två seriekopplade motstånd, *A* med en konstant resistans av 20 ohm och *B* med en varierbar resistans. Parallellt med *A* inkopplas en voltmeter *C*. Då *B*:s resistans är 50 ohm, visar *C* 8,6 V, och då *B*:s resistans är 60 ohm, visar *C* 7,5 V. Vid bägge mätningarna är samma mätområde på voltmetern inkopplat. Beräkna batteriets emk. Kopplingsschema erfordras.
8. En växelström ledes genom en spole utan järnkärna. Med mjukjärnsinstrument uppmätes spänningen över spolen till 60 V och strömstyrkan genom spolen till 1,5 A. Effektfaktorn är 0,80. Hur stor blir effektförbrukningen i spolen, då en likspänning på 60 V lägges över densamma?

Resultat: **1.** 116 kr. **2.** 77 kp i vertikalplanet genom stången med vars nedre del den bildar 23° ($\operatorname{tg} v = \frac{5}{12}$), med lodlinjen 22°. **3.** 100 varv/min. **4.** 1,58. **5.** 19 cm. **6.** Den förstnämnda trådens mittpunkt har 0,3 V högre potential. **7.** 32,3 V. **8.** 113 W.

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1959:

I. H. Rose, *A Modern Introduction to College Mathematics.* Pp. 530, $ 6.50.

H. Chernoff/L. E. Moses, *Elementary Decision Theory.* Pp. 364, $ 7.50.

M. Sasieni/A. Yaspan/L. Friedman, *Operations Research.* Pp. 316, $ 10.25.

F. S. Acton, *Analysis of Straight-Line Data.* Pp. 267, $ 7.95.

Experimental Nuclear Physics. Vol. III. Editor: E. Segré. Pp. 811, $ 23.00.

G. J. van Wylen, *Thermodynamics.* Pp. 567, $ 7.95.

W. T. Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism.* Pp. 675, $ 8.75.

The Structure of Electrolytic Solutions. Editor: W. Hamer. Pp. 441, $ 18.50.

High Temperature Materials. Editors: R. F. Hehemann/G. M. Ault. Pp. 544, $ 17.50.

Principles and Practice of Gas Chromatography. Editor: R. L. Pecsok. Pp. 226, $ 6.75.

G. N. Whyte, *Principles of Radiation Dosimetry.* Pp. 124, $ 7.00.

Solid State Magnetic and Dielectric Devices. Editor: H. M. Katz. Pp. 542, $ 13.50.

W. L. Faith, *Air Polution Control.* Pp. 259, $ 8.50.

H. J. Zimmermann/S. J. Mason, *Electronic Circuit Theory.* Pp. 564, $ 10.75.

S. Seshu/N. Balabanian, *Linear Network Analysis.* Pp. 571, $ 11.75.

T. C. Gordon Wagner, *Analytical Transients.* Pp. 202, $ 8.75.

J. B. Dennis, *Mathematical Programming and Electrical Networks.* Pp. 186, $ 4.50.

D. McCracken/H. Weiss/T. H. Lee, *Programming Business Computers.* Pp. 510, $ 10.25.

H. A. Haus/R. B. Adler, *Circuit Theory of Linear Noisy Networks.* Pp. 79, $ 4.50.

J. R. Singer, *Masers.* Pp. 147, $ 6.50.

S. Siggia, *Continuous Analysis of Chemical Process Systems.* Pp. 381, $ 8.50.

K. Brown, *Package Design Engineering.* Pp. 263, $ 8.50.

G. E. Condoyannis, *Scientific Russian.* Pp. 225, $ 3.50.

A. J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics.* Revised Edition. Homewood, Illinois, 1959. Pp. 946, $ 9.00.

J. A. Pople/W. G. Schneider/H. J. Bernstein, *High-resolution Nuclear Magnetic Resonance.* McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1959. Pp. 561, £ 5 4s. 6d.

Ben Zcines, *Servomechanism Fundamentals.* McGraw-Hill, 1959. Pp. 257, 43s. net.

On Numerical Approximation. Editor: R. E. Langer. (Symposium). The Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959. Pp. 462, $ 8.00.

Report of the Commission on Mathematics. 1. Program for College Preparatory Mathematics. Pp. 63, $ 1.00. 2. Appendices. Pp. 231, $ 1.00. May be ordered from College Entrance Examination Board, c/o Educational Testing Service, Box 592, Princeton, New Jersey, USA.

Zdeněk Kopal, *Close Binary Systems.* The International Astrophysical Series. Vol. V. Chapman & Hall, London, 1959. Pp. 558, 105s. net.

Progress in Cryogenics. Vol. 1. Editor: K. Mendelssohn. Heywood & Co., London, 1959. Pp. 259, 63s. net.

L. R. B. Elton, *Introductory Nuclear Theory.* Pitman & Sons, London, 1959. Pp. 286, 40s. net.

G. J. Whitrow, *The Structure and Evolution of the Universe.* Hutchinson, London, 1959. Pp. 212, 21s. net.

F. C. CHAMPION/N. DAVY, *Properties of Matter.* Third Edition. Blackie & Son, London/Glasgow, 1959. Pp. 334, 40s. net.

Report of the National Physical Laboratory 1958. Her Majesty's Stationery Office, London, 1959. Pp. 134, 8s. net.

K. HARRISON, *A Guide-Book to Biochemistry.* Cambridge Univ. Press, 1959. Pp. 150, 17s. 6d. net.

G. H. WANNIER, *Elements of Solid State Theory.* Cambridge Univ. Press, 1959, 35s. net.

C. P. SNOW, *The Two Cultures and the Scientific Revolution.* Cambridge Univ. Press, 1959. Pp. 52, 3s. 6d. net.

H. ARZELIÈS, *La dynamique relativiste et ses applications.* Fascicule II. Gauthier-Villars, Paris, 1959, 451 p., 6000 fr.

MARIE-ANTOINETTE TONNELAT, *Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité.* Masson & Cie, Paris, 1959, 394 p., 5000 fr.

L. SCHWARTZ, *Étude des sommes d'exponentielles.* Deuxième éd. Hermann. Paris, 1959, 152 p., 1800 fr.

JEAN-PIERRE SERRE, *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann, Paris, 1959, 202 p., 3000 fr.

E. ASMUS, *Einführung in die höhere Mathematik.* Ein Hilfsbuch für Chemiker, Physiker und andere Naturwissenschaftler. 3. Aufl. W. de Gruyter & Co., Berlin, 1959, 410 S., DM 24.—.

F. HELFFERICH, *Ionenaustauscher.* Bd. 1. Struktur, Herstellung, Theorie. Verlag Chemie, Weinheim, 1959, 520 S., DM 48.—.

K. A. JENSEN, *Almen Kemi.* I. 270 s., dkr. 41: —. II. 820 s., dkr. 74: —. Jul. Gjellerup, København, resp. 1957 och 1959.

CHRISTENSEN/JENSEN/KNUDSEN, *Fysik.* Elevøvelser nr. 1. Gyldendal, København, 1959, 48 s., dkr. 6: 75.

O. LINDSTAD, *Vejledning i skoleforsök i elektrisitetslære.* Norsk Lektorlags faklig-pedagogiske skrifter nr 6. Oslo 1959, 57 s. i stencil, nkr. 7: 50. Rekvireras från Norsk Lektorlag, Wergelandsv. 15, Oslo.

STIG EKELÖF, *Elektriska och magnetiska potentialfält.* Inst. för ellära och elektrisk mätteknik. Chalmers tekn. högskola, Göteborg. Stencilerad, 114 s., kr. 7: 50.

Svensk Naturvetenskap. Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds Årsbok 1959. Nordiska Bokh., Stockholm i distribution, 394 s., kr. 18: —.

S. WIDEQUIST, *Laboratorieteknik.* Sveriges Yngre Naturvetares Förening. Uppsala 1959. Offsettryck, 48 s., kr. 7: —.

B. WESTERLUND, *Astronomi.* Kurs för fysikstuderande. Andra uppl. Sveriges Yngre Naturvetares Förening. Uppsala 1959. Offsettryck, 80 s., kr. 8: —.

S. SVANTESSON, *Foundations of Thermodynamics.* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1959. I distribution, 87 s., kr. 12: —.

E. T. GLAS, *Elektroniska hjälpmedel.* Norstedt & Söner, Stockholm, 1959, 244 s., kr. 36: —.

A. GUSTAFSSON, *Matematik IA.* För den fyraåriga praktiska realskolans första klass. Gleerup, Lund, 1959, 160 s., kr. 4: 85.

LAGERSTEDT/NÄSMARK/WESTIN, *Geografiska tabeller.* 4:e uppl. Sv. Bokförl./Norstedt, Stockholm, 1959, 64 s., kr. 1: 70.

BÖÖS/LEDEN/LUNDBERG, *Lärobok i kemi för realgymnasiet.* 9:e uppl. Sv. Bokförl./Norstedt, Stockholm, 1959, 315 s., kr. 9: 85.

Ö. PERSSON, *Vi räknar med sticka.* Sv. Bokförl./Norstedt, Stockholm, 1959, 30 s., kr. 2: 40.

s · Leden · Lundberg

ärobok i kemi för gymnasiet

9:e reviderade upplagan **G inb. 9:85**

dberg

ndledning vid

aborationer i kemi

6:e upplagan utarbetad i anslutning till den nya upplagan av läroboken **G 3:65**

len · Lundberg

ärobok i kemi

för gymnasiets allmänna linje, ring I^3, II^4, III^4
G 5:05

ärobok i kemi

för gymnasiets allmänna linje, sociala grenen, ring II^3 och III^4 G 3:95

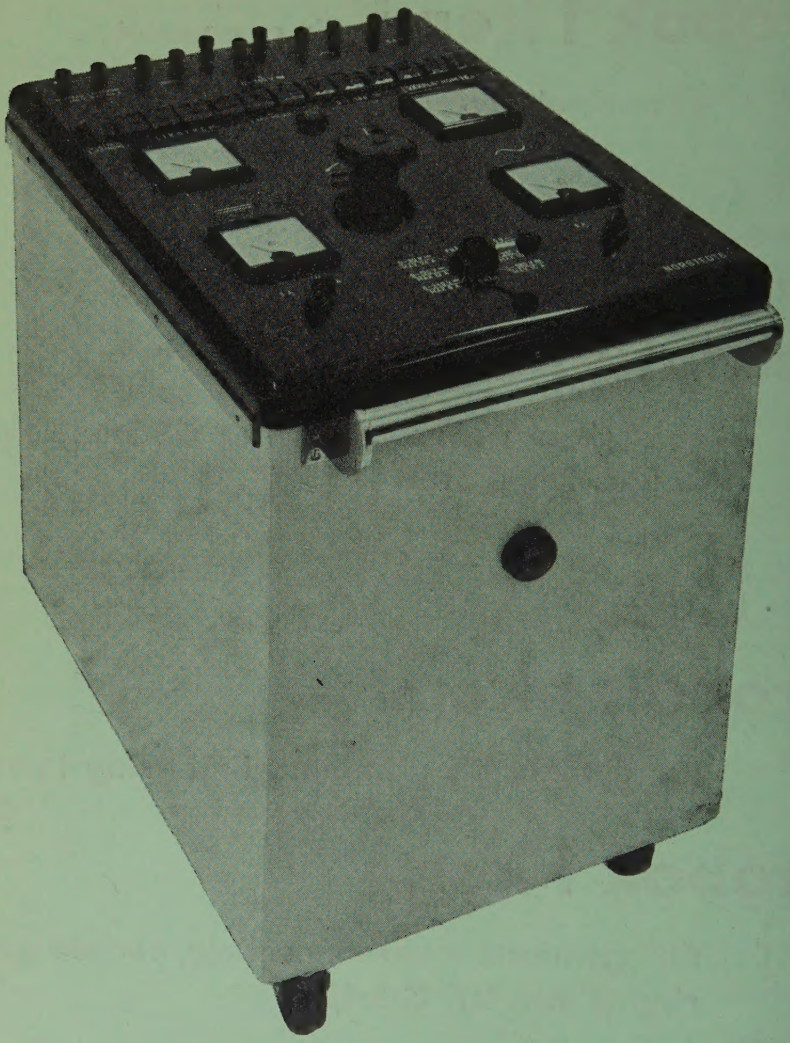
S B
F

SVENSKA BOKFÖRLAGET

Lärarexemplar genom SKOLBOKCENTRALEN

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL

Den transportabla KOPPLINGSTAVLA



Praktisk nyhet från Norstedts för alla läroverk och därmed jämställda läro-anstalter. Kopplingstavlan kan användas var som helst där tillgång till 3-fa växelström finnes och är försedd med hjul för att lätt kunna flyttas.

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL

Lund 1959, Håkan Ohlssons Boktryckeri